Extended Kalman Filter로 ARS 설계

KITECH 양광웅 작성

로봇의 자세를 측정하기 위해 ARS(Attitude Reference System)를 설계한다. 3 차원 자이로 센서와 가속도 센서로부터 측정되는 각속도와 가속도로부터 오일러 각을 측정하고, EKF(Extended Kalman Filter)로 융합하여 로봇의 자세를 계산한다. EKF 는 자이로의 각속도를 적분하여 오일러각을 예측(predict)하고 중력 가속도의 방향으로부터 구한 각도로 오일러각을 보정(update)하는 과정을 수행한다.

Predict 과정

오일러각 예측

먼저 자이로의 각속도를 적분하여 상태변수(오일러각) $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \phi & \theta & \psi \end{bmatrix}^T$ 를 예측하는 과정은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_k^- &= f(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}, \boldsymbol{\omega}_{k-1}) \\ &= \hat{\mathbf{x}}_{k-1} + \mathbf{C}^{-1} \boldsymbol{\omega}_{k-1} \cdot \Delta t \end{aligned}$$

시스템 모델 $f(\cdot)$ 는 자이로 센서에서 측정한 각속도 $\boldsymbol{\omega}_{k-1} = \begin{bmatrix} \omega_x & \omega_y & \omega_z \end{bmatrix}^T$ 를 오일러각 $\hat{\mathbf{x}}_{k-1} = \begin{bmatrix} \phi & \theta & \psi \end{bmatrix}^T$ 에 적분하는 비선형 함수다.

$$\mathbf{C}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \sin\phi \tan\theta & \cos\phi \tan\theta \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 0 & \sin\phi / \cos\theta & \cos\phi / \cos\theta \end{bmatrix}$$

$\mathbf{C}^{-1}$ 은 자이로 센서에서 측정한 각속도를 오일러각의 변화율 $\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{\phi} & \dot{\theta} & \dot{\psi} \end{bmatrix}^T$ 로 변환하기 위한 행렬이다.

각속도-오일러각 변화율 관계

$\mathbf{C}$ 는 오일러각 변화율과 각속도간의 관계를 표현하는 행렬로 다음 관계식으로부터 유도할 수 있다.

$$\mathbf{R}_z(\psi)\mathbf{R}_y(\theta)\mathbf{R}_x(\phi)\begin{bmatrix}\omega_x\\ \omega_y\\ \omega_z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\ \dot\psi\end{bmatrix}+\mathbf{R}_z(\psi)\begin{bmatrix}0\\ \dot\theta\\ 0\end{bmatrix}+\mathbf{R}_z(\psi)\mathbf{R}_y(\theta)\begin{bmatrix}\dot\phi\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\omega_x\\ \omega_y\\ \omega_z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dot\phi\\0\\0\end{bmatrix}+\mathbf{R}_x^T(\phi)\begin{bmatrix}0\\ \dot\theta\\ 0\end{bmatrix}+\mathbf{R}_x^T(\phi)\mathbf{R}_y^T(\theta)\begin{bmatrix}0\\0\\ \dot\psi\end{bmatrix}$$

$\mathbf{C}$ 는 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix}\omega_x\\ \omega_y\\ \omega_z\end{bmatrix}=\mathbf{C}\begin{bmatrix}\dot\phi\\ \dot\theta\\ \dot\psi\end{bmatrix},\quad \mathbf{C}=\begin{bmatrix}1 & 0 & -\sin\theta\\ 0 & \cos\phi & \sin\phi\cos\theta\\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi\cos\theta\end{bmatrix}$$

$\mathbf{C}^{-1}$ 는 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix}\dot\phi\\ \dot\theta\\ \dot\psi\end{bmatrix}=\mathbf{C}^{-1}\begin{bmatrix}\omega_x\\ \omega_y\\ \omega_z\end{bmatrix},\quad \mathbf{C}^{-1}=\begin{bmatrix}1 & \sin\phi\tan\theta & \cos\phi\tan\theta\\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi\\ 0 & \sin\phi/\cos\theta & \cos\phi/\cos\theta\end{bmatrix}$$

회전행렬과 오일러각 관계

오일러각 $\phi,\ \theta,\ \psi$ 에 의한 회전행렬 $\mathbf{R}$ 는 다음과 같이 정의된다.
(회전 순서가 z 축, y 축, x 축 순서임에 주의)

$$\mathbf{R}=\mathbf{R}_z(\psi)\cdot\mathbf{R}_y(\theta)\cdot\mathbf{R}_x(\phi)$$
$$=\begin{bmatrix}\cos\theta\cos\psi & \sin\phi\sin\theta\cos\psi-\cos\phi\sin\psi & \cos\phi\sin\theta\cos\psi+\sin\phi\sin\psi\\ \cos\theta\sin\psi & \sin\phi\sin\theta\sin\psi+\cos\phi\cos\psi & \cos\phi\sin\theta\sin\psi-\sin\phi\cos\psi\\ -\sin\theta & \sin\phi\cos\theta & \cos\phi\cos\theta\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}_x(\phi)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi\\ 0 & \sin\phi & \cos\phi\end{bmatrix},\quad \mathbf{R}_y(\theta)=\begin{bmatrix}\cos\theta & 0 & \sin\theta\\ 0 & 1 & 0\\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta\end{bmatrix},\quad \mathbf{R}_z(\psi)=\begin{bmatrix}\cos\psi & -\sin\psi & 0\\ \sin\psi & \cos\psi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

회전행렬 $\mathbf{R}$ 로부터 오일러각을 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$\psi = \tan^{-1}\left(\frac{a_{21}}{a_{11}}\right),$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{-a_{31}}{\sqrt{a_{32}^2 + a_{33}^2}}\right),$$

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{a_{32}}{a_{33}}\right).$$

a_{ij} 는 행렬 $\mathbf{A}$ 의 i 행과 j 열의 원소다.

오차 공분산 계산

$$\mathbf{P}_k^- = \mathbf{F}_{k-1}\mathbf{P}_{k-1}\mathbf{F}_{k-1}^T + \mathbf{Q}_{k-1}$$

여기서 $\mathbf{F}_{k-1}$ 는 시스템 모델 $f(\cdot)$ 의 자코비안이다.

$$\mathbf{F}_{k-1} \triangleq \left.\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}\right|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}_{k-1}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_y \cos\phi \tan\theta - \omega_z \sin\phi \tan\theta & \omega_y \sin\phi \sec^2\theta + \omega_z \cos\phi \sec^2\theta & 0 \\ -\omega_y \sin\phi - \omega_z \cos\phi & 0 & 0 \\ \omega_y \cos\phi \sec\theta - \omega_z \sin\phi \sec\theta & \omega_y \sin\phi \sec\theta \tan\theta + \omega_z \cos\phi \sec\theta \tan\theta & 0 \end{bmatrix} \Delta t$$

$\mathbf{Q}_{k-1}$ 는 시스템의 공분산 행렬로 다음과 같이 정한다.

$$\mathbf{Q}_{k-1} = \begin{bmatrix} 0.001 & 0 & 0 \\ 0 & 0.001 & 0 \\ 0 & 0 & 0.001 \end{bmatrix}$$

Update 과정

중력가속도로 오일러각 계산

가속도 센서에서 측정한 가속도 $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_x & a_y & a_z \end{bmatrix}^T$ 에는 중력가속도와 센서의 가속에 의한 다양한 종류의 가속도가 포함되어있다. 이를 식으로 나타내면 다음과 같다.

$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} + \mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega} + \mathbf{R}^T \mathbf{g} \qquad (\because \mathbf{R}^T = \mathbf{R}^{-1})$$

$$= \begin{bmatrix} \dot{v}_x \\ \dot{v}_y \\ \dot{v}_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & v_z & -v_y \\ -v_z & 0 & v_x \\ v_y & -v_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} + g_z \begin{bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \sin\phi \\ \cos\theta \cos\phi \end{bmatrix}$$

여기서 $\dot{\mathbf{v}} = \begin{bmatrix} \dot{v}_x & \dot{v}_y & \dot{v}_z \end{bmatrix}^T$ 는 선가속도이며 $\mathbf{g} = \begin{bmatrix} g_x & g_y & g_z \end{bmatrix}^T$ 는 관성좌표계에서 중력가속도 값 $(0,\ 0,\ -9.81)$ 을 가진다.

위 식에서 선가속도 $\dot{\mathbf{v}}$ 가 0이고 각속도 $\boldsymbol{\omega}$ 가 0일 때는 다음과 같이 간단히 쓸 수 있다.

$$\begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} = g_z \begin{bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta\sin\phi \\ \cos\theta\cos\phi \end{bmatrix}$$

오일러각으로 정리하면 다음과 같다.

$$\tan\phi = \frac{a_y}{a_z}, \quad \sin\theta = -\frac{a_x}{g_z}.$$

$$\mathbf{z}_k = \begin{bmatrix} \tan^{-1}\left(\dfrac{a_y}{a_z}\right) \\ \sin^{-1}\left(-\dfrac{a_x}{g_z}\right) \end{bmatrix}$$

센서의 측정 모델

측정 모델 $h(\cdot)$ 는 가속도 센서에서 계산한 오일러각을 그대로 사용하기 때문에 다음 식에서와 같이 단위행렬이 된다.

$$h(\mathbf{x}_k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k$$

칼만 이득 계산

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^T (\mathbf{H}_k \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k)^{-1}$$

$\mathbf{H}_k$ 는 측정 모델 $h(\cdot)$ 로부터 구한다.

$$\mathbf{H}_k \triangleq \left.\frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}}\right|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}_k^-} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

그리고 $\mathbf{R}_k$ 은 다음과 같이 정한다.

$$\mathbf{R}_k = \begin{cases} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & \text{if } \|\mathbf{a}\| \approx 9.81, \\ \begin{bmatrix} \infty & 0 \\ 0 & \infty \end{bmatrix} & \text{else.} \end{cases}$$

오일러각 보정

가속도 센서로 측정한 각도 $\mathbf{z}_k$ 와 센서 모델로 예측한 각도 $h(\hat{\mathbf{x}}_k^-)$ 의 차로 오차 $\tilde{\mathbf{y}}_k$ 를 계산하고, 이 오차에 칼만 이득 $\mathbf{K}_k$ 을 곱하여 오일러각을 보정한다.

$$\tilde{\mathbf{y}}_k = \mathbf{z}_k - h(\hat{\mathbf{x}}_k^-)$$

$$\underline{\hat{\mathbf{x}}_k = \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathbf{K}_k \tilde{\mathbf{y}}_k}$$

오차 공분산 계산

$$\underline{\mathbf{P}_k = \mathbf{P}_k^- - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k \mathbf{P}_k^-}$$