

1. 채권시장의 양지와 음지

Structured Note들이 발행되면서 채권시장에 생긴 큰 변화 중 하나는 모든 채권이 금리의 하락으로부터 수혜를 받는 것은 아니라는 사실이다. 지난 2002년 4월을 정점으로 금리는 1년 가까이 하락 추세를 유지하고 있다. 국고채 3년 수익률을 기준으로 볼 때 금리는 무려 2% 가량 하락하였다. 대부분의 채권들이 쌓여가는 투자 수익률로 즐거운 비명을 지르고 있는 사이, Dual Indexed FRN등을 비롯한 일련의 Structured Notes들은 채권시장의 관리종목 취급을 받고있다. 특히 대부분의 Structured Notes들은 적절한 헷지수단이 없다는 점에서 시장 상황에 속수무책일 수 밖에 없었다.

웬만한 금리 변화에 대해서는 비교적 안정적이며 높은 수익을 주도록 설계되어 있는 일부 Range Note도 시장금리 하락이라는 상황속에서 뜻밖의 어려움을 겪고 있다. 기준금리의 하한 범위가 3%대 후반이거나 4%대인 Range Note들이 여기에 포함된다. 그러나 기준금리의 하한 범위가 0%인 Range Note는 1년 가까운 금리하락으로 인해 오히려 가치가 급격히 상승하였다. 유사한 구조의 채권이지만 금리 하락기의 투자성과 측면에서는 극명한 대조를 보이고 있어서 이채롭다.

한편 기준금리의 하한범위가 3%대 이거나 4%대인 Range Note의 Duration은 최근 Negative 값을 보이고 있다. 이러한 종목에서는 금리가 하락하면 채권가격이 하락하고, 반대로 금리가 상승하면 채권가격이 오르는 현상이 발견되고 있어 주의가 요구된다. 이러한 현상이 발생하는 이유는 금리하락으로 인해 Range Note에 내재되어 있는 옵션(Put 옵션)이 OTM에서 ATM으로 전환되면서 옵션가치가 상당히 커졌기 때문이다. 본 보고서는 이러한 점에 주목하여 Range Note의 기본구조와 가치평가 방법 및 가격 민감도(듀레이션)등에 대한 이해를 돕고자 작성되었다.

2. Range Note의 기본구조

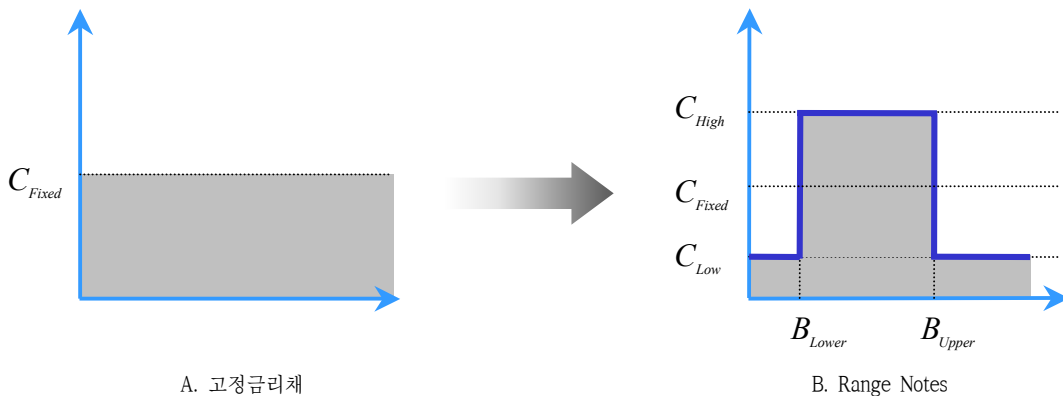
Range Note는 기준금리가 일정한 범위안에 있을 때는 동일 조건의 고정금리채에 비해 높은 이자를 지급하고, 범위를 벗어났을 때는 사실상 이자를 지급하지 않는 변형 FRN이다. 예를 들어 CD91일 금리가 4%와 6% 사이에 있을 때는 6%의 이자를 지급하고, 이를 벗어날 경우에는 1%의 이자를 지급하는 조건이 Range Note의 전형적인 구조다. 이 경우 투자자를 유치하

기 위해 기준금리가 사전에 정한 범위안에 있을 때는 동일한 만기의 고정금리채보다 높은 이자를 지급하도록 되어 있는 것이 보통이다.

따라서 미래의 기준금리가 현재 수준에서 크게 벗어나지 않을 것이라고 생각하는 투자자에게는 동일조건외 고정금리채보다 높은 이자수익이 기대되기 때문에 Range Note는 매력적인 투자수단이 된다. 또 기준금리의 상하한 범위는 발행 당시의 금리 수준에서 위아래로 일정하게 벌어져서 결정되기 때문에 특별한 일이 없는 한 가까운 장래까지는 상대적으로 높은 이자수익이 거의 확실시 된다는 점도 투자자들을 유인하는 요인이다.

그림1은 고정금리채를 Range Note로 구조화하는 일반적인 과정을 나타내고 있다. 기준금리가 일정한 범위($B_{Lower} \sim B_{Upper}$)안에 있을 때는 고정금리채보다 높은 이자(C_{High})를 지급하게 되며 반대로 기준금리가 범위를 벗어날 경우에는 낮은 금리(C_{Low})가 지급된다. 따라서 Range Note의 발행가격이 Par가 되기 위해서는 첫째, 기준금리의 범위를 결정해 놓고 각 지급이자를 적절히 조정되거나 둘째, 지급이자를 결정해 놓고 기준금리의 범위가 적절하게 조정되어야 한다.

(그림 1) Range Note의 기본구조



먼저 그림1의 A처럼 고정금리채를 발행하는 경우를 살펴보자. 고정금리채는 기준금리가 어떠한 값을 갖더라도 일정한 이자를 지급하는 채권이므로 기준금리의 범위가 $-\infty \sim +\infty$ 인 Range Note의 특수한 경우로 해석할 수 있다. A의 회색으로 표시된 부분은 표면금리 C_{Fixed} 하에서의 고정금리채의 시장가치를 나타내며 일반적으로 발행시점에서는 Par이다.

이제 이러한 고정금리채를 발행하는 대신 Range Note를 발행하는 경우를 생각해 보자. 기준금리의 범위는 $B_{Lower} \sim B_{Upper}$ 이고 차기 이자지급액은 범위안에 있을 경우에는 C_{High} 를, 그 이외의 경우에는 C_{Low} 를 지급하는 구조이므로 이를 그림1의 B처럼 표시할 수 있다. 이때 Range Note의 시장가치는 앞서와 마찬가지로 회색으로 표시된 부분이다. A와 B를 비교해 보면 Range Note의 표면이율이 어떻게 결정되어야 하는지 알 수 있다. 발행시점에서는 Range Note의 가격역시 Par가 되어야 하므로, 고정금리채의 가치에 비해서 높은 부분의 면적과 고정금리채의 가치에 비해서 낮은 부분의 면적이 서로 동일하도록 표면이율이 정해져야 하는

것이다. 이러한 원리는 기준금리의 범위를 넓히거나 좁히는 경우에도 동일하게 적용된다.

현재 우리나라에 발행되어 유통되고 있는 Range Note는 모두 CD91일 금리를 기준금리로 하고 있기 때문에 CD91일 금리의 미래 움직임에 대한 예측이 Range Note에 대한 투자 의사결정의 핵심이라고 할 수 있다. CD91일 금리의 미래 움직임을 합리적으로 예측하기 위해서는 이자율 Swap 시장을 살펴볼 필요가 있다. 이자율 Swap 시장에서는 변동금리로 CD91일 금리를 사용하기 때문에 이에 대응하는 만기별 Fixed Rate로부터 CD91일 금리의 Implied Forward Rate을 구할 수 있기 때문이다. 특히 일정한 가정하에서는 Swap Market의 Implied Forward Rate가 위험중립하의 미래 금리의 기대값임이 알려져 있다. 이러한 이유로 채권 시가평가사들은 Range Notes의 가치평가에 일반적으로 Swap Market의 Implied Forward Rate을 사용하고 있다.

3. Valuation

Range Note의 구조분해

투자자 측면에서 보면 Range Note는 다음과 같은 세가지 거래를 동시에 실행한 것이 된다.

- 고정금리채 매입
- Digital Call 옵션 시리즈 매도
- Digital Put 옵션 시리즈 매도

즉, 높은 이자를 지급하는 할증 고정금리채(Premium Bond)를 매입하고 동시에 발행자에게 일련의 옵션을 매도하여 Range Note의 순매수가격을 Par로 낮춘다는 의미이다. 투자자는 매 이자지급 시점에서 기준금리가 범위안에 존재할 때는 옵션이 행사되지 않기 때문에 높은 수준의 이자수익을 그대로 향유하게 된다. 반대로 기준금리가 범위를 벗어났을 경우에는 높은 수준의 이자수익을 그대로 향유하지 못한다. 왜냐하면 옵션이 행사되어 이자수익의 일부(범위안에 있을 때 받는 이자지급액과 범위를 벗어났을 때 받는 이자지급액의 차이)를 옵션매수자(Range Note 발행자)에게 되돌려 주어야 하기 때문이다.

Range Note의 가치는 이러한 세가지 거래 각각이 가지고 있는 가치를 합하여 결정될 수 있다. 고정금리채의 가치는 해당 만기의 YTM이 관찰되면 쉽게 계산할 수 있으므로 여기서는 내재된 옵션의 특성과 가치평가에 대해서 자세히 살펴보도록 한다.

Range Note에 내재되어 있는 옵션은 일반적인 옵션과는 조금 차이가 있다. 일반적인 이자율 Call 옵션 매도 포지션의 만기시점 Payoff는 $Max(R - X, 0)$ 로 이자율 R 이 행사가격 X 보다 상승하면 그 차이만큼의 손실이 발생한다. 즉, 이자율이 무한히 상승하게 되면 손실도 무한히 커지게 된다. 그러나 Range Note에 내재되어 있는 Call 옵션은 이자율이 상승하여 옵션이 행사되더라도 손실액이 $C_{High} - C_{Low}$ 로 정해져 있다. 내재된 Put 옵션도 마찬가지로 이자율이 하락하여 Put 옵션이 행사되더라도 옵션 매도자(Range Note 매수자)의 손실액은 Call 옵션

선 매도 포지션과 마찬가지로 $C_{High} - C_{Low}$ 이다. 이러한 Cash-or-Nothing의 특성 때문에 Range Note에 내재되어 있는 옵션을 Digital 옵션 또는 Binary 옵션이라고 부르며 Range Note를 Digital FRN이라고 부르기도 한다.

한편 Range Note에 내재되어 있는 옵션들은 매 이자지급 시점이 만기인 유럽형 이자율 옵션의 포트폴리오로 간주할 수 있다. 예를 들어 만기가 3년이고 3개월마다 이자를 지급하며, 직전 이자지급일 전 영업일의 기준금리로 이자지급액을 결정하는 Range Note에는 11개의 유럽형 Digital Call 옵션과 11개의 유럽형 Digital Put 옵션이 각각 내재되어 있다. 옵션의 개수가 12개가 아닌 것은 일반적으로 첫 이자지급액은 발행시점에 결정되어 있는 시장관행을 반영하고 있다.

이상의 논의는 Range Note의 가치가 다음의 식 (2.1)로 결정될 수 있음을 의미한다.

$$P_{RangeNote} = P_{PremiumBond} - \left(\sum P_{DigitalCall} + \sum P_{DigitalPut} \right) \quad (2.1)$$

Black 모형을 이용한 내재 옵션가치 평가

Range Note에 내재되어 있는 옵션의 가치를 평가하기 위해서 일반적으로 가장 많이 사용되는 것은 Black의 모형이다. Black의 옵션 모형을 변형하면 Digital 이자율 옵션은 다음과 같은 Closed Form Solution을 갖게 됨을 보일 수 있다.

$$\begin{aligned} C_T &= Ke^{-rT} N(d) \\ P_T &= Ke^{-rT} N(-d) \\ \text{where, } d &= \frac{\ln(f_{T-1,T} / X) - \sigma^2 / 2T}{\sigma\sqrt{T}} \end{aligned} \quad (2.2)$$

$N(\cdot)$: Cumulative Normal Density Function
 $K = F(Coupon_H - Coupon_L) / m$

여기서 C_T 는 만기 T 인 Digital Call 옵션의 가치, P_T 는 만기 T 인 Digital Put 옵션의 가치, r 은 무위험 이자율, f 는 Forward Rate, F 는 액면금액, m 은 연간 이자지급 횟수를 의미한다. 또 행사가격 X 는 Digital Call 옵션인 경우에는 B_{Upper} 가 되며, Digital Put 옵션인 경우에는 B_{Low} 가 된다. 식 (2.2)에서 K 는 옵션이 행사될 경우의 Payoff를, $N(\cdot)$ 는 옵션이 행사될 위험중립 확률로 각각 해석할 수 있으므로 만기시점의 기대 Payoff를 현재가치화한 것이 Digital 옵션의 가치라는 것을 의미한다.

Numerical Examples 1 : Range Note에 내재되어 있는 옵션가치의 계산

다음과 같은 발행조건을 갖는 가상적인 Range Note의 발행시점에서의 Pricing 과정을 알아보자.

- 발행등급 : 공사채 AAA
- 만기 : 3년
- 연간 이자지급 횟수 : 4회 (3개월 이표채)
- 이자지급 조건 : $If \ 3.75\% \leq CD91 \leq 5.75\%$ then 6.7%, Else 2.0%
- 변동성 : 20%

시장관행에 따라 차기 이자지급액을 결정하는 기준금리는 직전 이자지급일에 결정된다고 하게되면 이 Range Note는 만기 3년이고 표면이율이 6.7%인 고정금리채와 11개의 Digital Call 옵션계약, 11개의 Digital Put 옵션계약의 합성으로 이해될 수 있다. 표 1은 액면금액 1만원당 현재가치화한 각 옵션의 가격을 보여주고 있다. 계산에 사용된 CD금리의 만기별 Spot Rate은 2003년 1월 중순경의 Swap Market의 최종호가를 사용하여 추정된 연속복리형 금리이며 이로부터 3개월 단위의 Implied Forward Rate를 역산하였다.

(표 1) Black 모형을 이용한 내재 옵션의 가치계산

Swap Market Data			Call 가치 계산			Put 가치 계산			Total
만기	Spot Rate	Forward	X	N(d)	Call	X	N(-d)	Put	
0.25	4.30%	4.30%							
0.50	4.34%	4.38%	0.0575	0.023	2.65	0.0375	0.152	17.49	20.14
0.75	4.38%	4.46%	0.0575	0.060	6.84	0.0375	0.180	20.49	27.33
1.00	4.42%	4.54%	0.0575	0.100	11.25	0.0375	0.196	22.04	33.28
1.25	4.46%	4.62%	0.0575	0.138	15.31	0.0375	0.206	22.86	38.18
1.50	4.50%	4.70%	0.0575	0.172	18.91	0.0375	0.212	23.29	42.20
1.75	4.52%	4.64%	0.0575	0.173	18.77	0.0375	0.251	27.21	45.97
2.00	4.54%	4.70%	0.0575	0.197	21.16	0.0375	0.255	27.34	48.49
2.25	4.57%	4.76%	0.0575	0.218	23.13	0.0375	0.259	27.46	50.59
2.50	4.59%	4.82%	0.0575	0.237	24.79	0.0375	0.263	27.54	52.33
2.75	4.62%	4.87%	0.0575	0.252	26.12	0.0375	0.267	27.64	53.75
3.00	4.64%	4.92%	0.0575	0.267	27.26	0.0375	0.271	27.66	54.92
Total Premium					196.18			271.01	467.19

가치평가 시점의 Spot Rate Curve는 우상향하고 있었다. 이러한 이자율의 기간구조 때문에 만기가 비교적 짧은 Digital Call 옵션의 가치는 작은 값을 나타내다가 만기가 길어질수록 높은 가치를 갖는 것으로 나타났다. 또 전반적으로 이자율 수준이 낮아서 3.75%를 행사가격으로 하는 Digital Put 옵션의 가치는 만기가 짧더라도 높은 값을 갖고 있지만 우상향하는 Curve의 특성으로 인해 만기가 길어지더라도 옵션가치의 증가폭이 Digital Call의 경우에 비해 크지 않은 것을 볼 수 있다.

(그림 2) 만기별 Spot Rate와 Range Note에 내재되어 있는 각 옵션의 가치

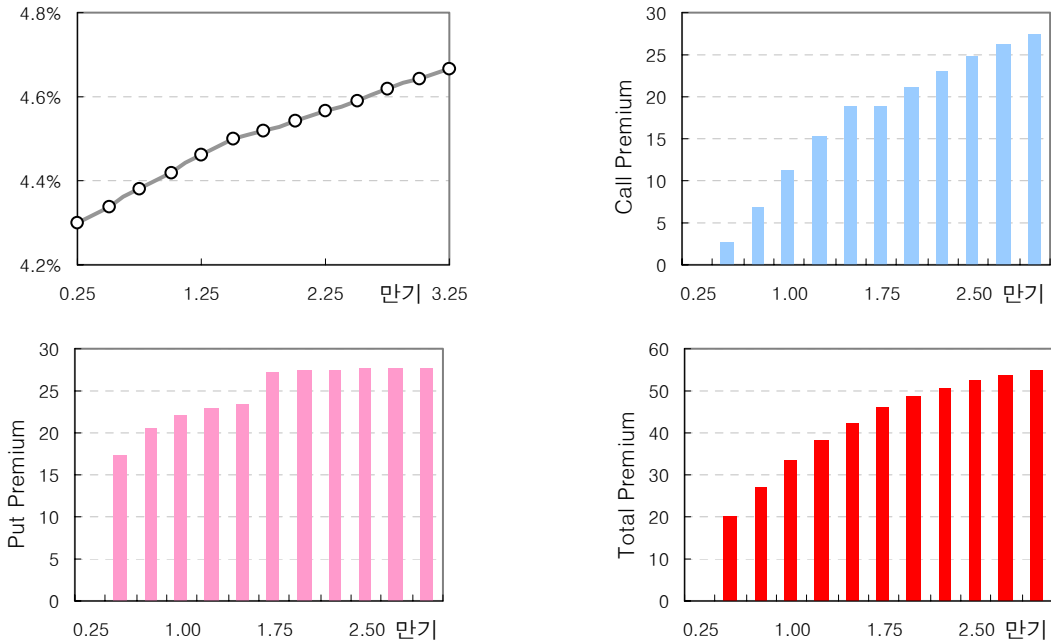
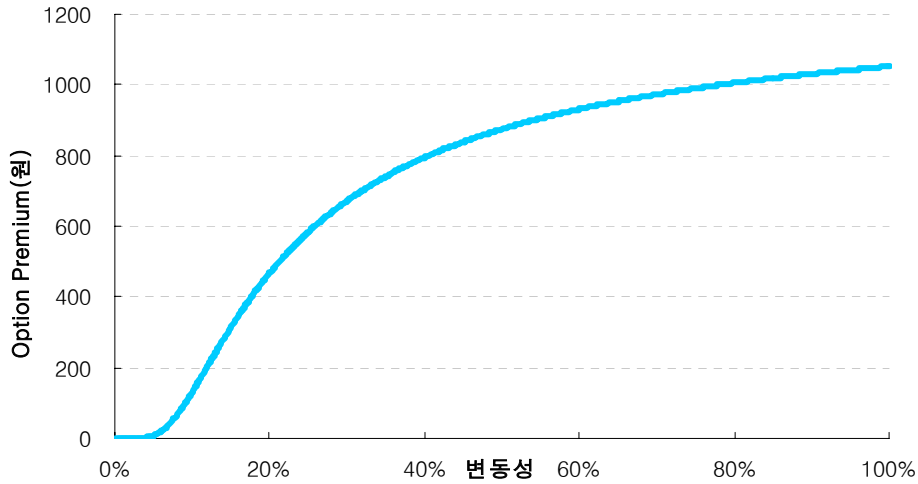


그림2는 가치평가 시점에서 구한 Spot Rate의 기간구조(오른쪽 상단)와 각 옵션의 가치를 만기별로 보여주고 있다. 내재된 Digital Call 옵션의 총가치는 196.18원인데 투자자는 발행자에게 11개의 Digital Call 옵션을 매도하고 그 대가로 196.18원을 받게된다는 것을 의미한다. 또 11개의 Digital Put 옵션을 매도하고 받는 금액은 271.01원이다. 결국 Range Note에 내재되어 있는 옵션의 총가치는 467.19원이고 이것이 투자자가 발행자와의 옵션거래로 수취하게 되는 금액이다. 이러한 사실은 거래비용이 없다고 가정할 경우, Range Note를 Par에 거래하기 위해서는 표면이율 6.70%를 지급하는 3년 만기 고정금리채(Premium Bond)의 가격이 10,467.19여야 한다는 것을 의미한다.

4. Range Note의 가격결정 요인

발행시점에서 Range Note의 가치결정에 영향을 미치는 요인으로는 발행사의 YTM, 이자율의 변동성, 기준금리의 범위, Implied Forward Rate 등이 있다. 이중에서 발행사의 YTM은 고정금리채의 가격결정에 영향을 미치는 것이므로 생략하고 여기서는 이자율의 변동성, 기준금리의 범위, Implied Forward Rate가 Range Note에 내재되어 있는 옵션가치와 어떠한 관계에 있는지를 살펴보고자 한다.

(그림 3) 이자율 변동성에 대한 내재 옵션 가치의 민감도



이자율 변동성에 대한 내재 옵션 가치의 민감도

식 (2.2)에서 보듯이 Digital 옵션의 기초자산은 Forward Rate 자체로 볼 수 있으므로 이자율의 변동성이라함은 Implied Forward Rate의 변동성을 의미한다. 일반적으로 옵션의 가치는 기초자산의 변동성과 정의 상관관계에 있는 것으로 알려져 있다. 즉, 기초자산의 변동성이 증가하면 옵션가치도 증가하고 변동성의 감소하면 옵션가치도 감소한다. Range Note에 내재되어 있는 Digital 옵션의 가치도 마찬가지이다. 그림3은 앞서의 예제에서 이자율의 변동성을 변화시킬 때 옵션가치가 어떻게 변화하는 지를 보여주고 있다.

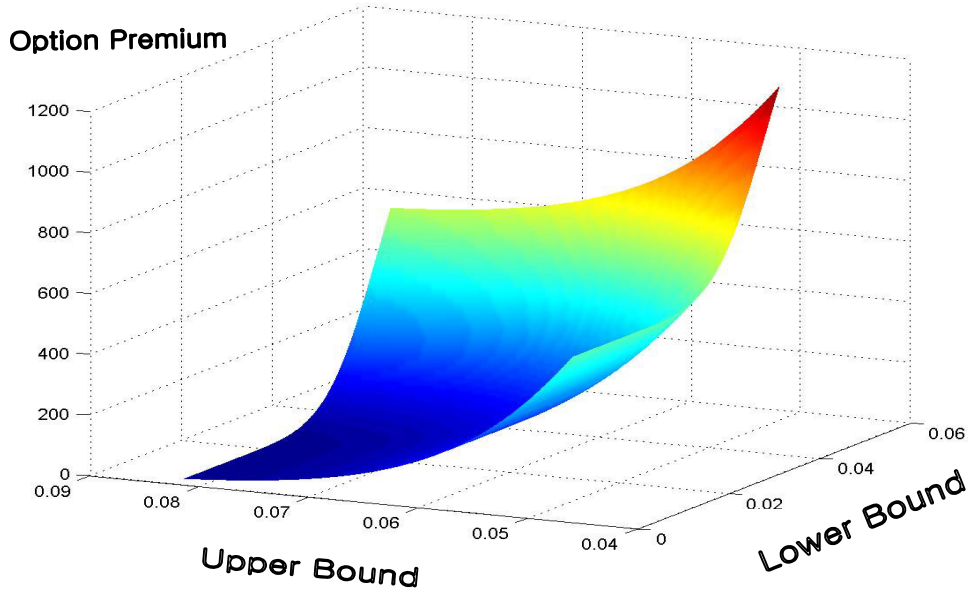
그림3은 Digital 옵션의 가치가 변동성과 정의 상관관계가 있다는 사실을 잘 보여준다. 다만 그 관계가 선형이 아니라 비선형이어서 변동성이 충분히 커진 이후에는 옵션가치의 증가정도가 둔화됨을 알 수 있다.

Range 변화에 대한 내재 옵션 가치의 민감도

Range Note의 발행과 관련된 이슈 중에 하나는 기준금리의 범위를 어떻게 결정하느냐라고 할 수 있다. 기준금리의 범위를 넓게 결정하게 되면 옵션의 가치는 작아질 것이고 반대로 범위를 좁게 결정하면 옵션의 가치는 상대적으로 커질 것이다. 이러한 관계가 그림4에 나타나 있다.

그림4는 기준금리의 범위가 넓어지게 되면 옵션가치가 감소하고, 반대로 기준금리의 범위가 줄어들게 되면 옵션가치가 증가한다는 직관과 잘 일치한다. 가령 Upper Bound가 8%인 경우를 살펴보면 Lower Bound가 0%인 때는 옵션가치가 24원 가량으로 작은데 비해 Lower Bound가 4.55%로 올라가게 되면 옵션가치가 651원으로 큰폭으로 증가함을 알 수 있다.

(그림4) Range 변화에 대한 내재 옵션 가치의 민감도



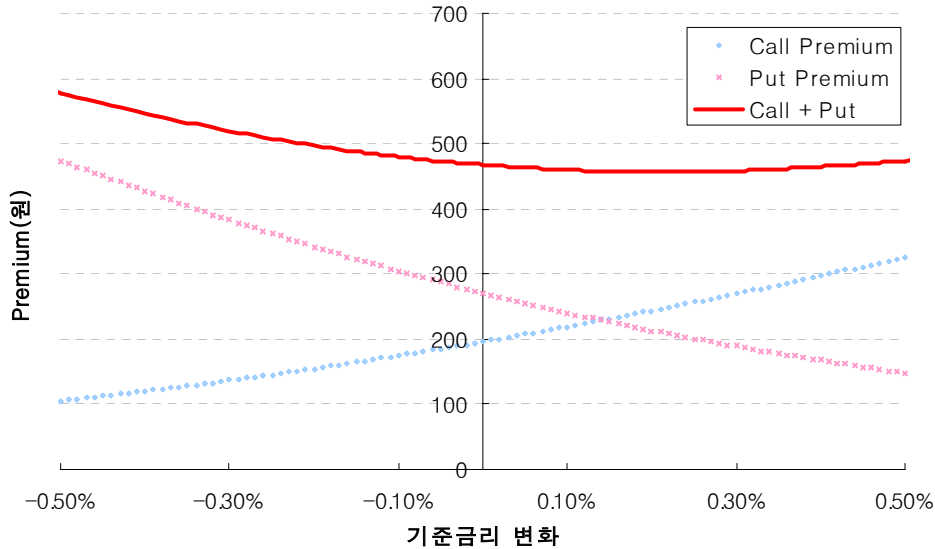
기준금리 변화에 대한 옵션 가치의 민감도

그림5는 Range Note가 앞서의 예제와 동일하게 발행된 경우, 바로 다음 순간에 기준금리의 Spot Rate가 평행이동한 경우의 내재 옵션가치의 변화를 보여주고 있다. 기준금리가 상승하게 되면 투자자 측면에서 보면 매도한 Digital Call 옵션이 행사될 가능성이 높아지기 때문에 Call 가치가 커져서 Range Note의 가격을 하락시키는 요인이 된다. 그러나 기준금리가 상승하게 되면 매도한 Digital Put 옵션은 행사 가능성이 적어져서 Put 가치는 작아지게 된다. 예를 들어 기준금리가 10bp 상승하게 되면 Call 가치는 198원에서 219원으로 약 21원 가량 상승하고, Put 가치는 268원에서 241원으로 약 27원 가량 감소한다.

결국 기준금리 10bp 상승은 Range Note의 내재 옵션 총가치를 6원 정도 감소시킨다. 만일 발행사의 YTM 변화가 없다면 Range Note의 가치는 옵션 가치의 감소분 6원 만큼 상승한다. 좀더 현실적으로 기준금리가 10bp 상승할 때 발행사의 YTM도 10bp 상승하는 상황을 살펴보자. 할증 고정금리채(Premium Bond)의 듀레이션을 2.5년으로 가정할 경우 YTM의 10bp 상승은 할증 고정금리채의 가치를 약 25원 감소시킬 것인데 옵션의 Range Note 가치상승 효과 6원을 감안하면 약 19원 정도만 하락하는 것이 Range Note 가치 변화의 특징이라고 할 수 있다. 이와반대로 기준금리가 하락하는 경우에는 반대의 논리가 성립한다. 즉 기준금리의 하락은 Call 가치의 하락, Put 가치의 상승을 가져온다.

그림5에서 재미있는 점은 실선으로 표시된 내재 옵션의 총가치(Call + Put)가 기준금리의 변화에 대해 대칭적이지 않다는 점이다. 이는 Put 가치 곡선의 기울기가 Call 가치 곡선의 기울

(그림 5) 기준금리 변화에 대한 옵션 가치의 민감도



기보다 크기 때문에 나타나는 현상이다. 두 곡선의 기울기가 다른 원인은 가치평가 시점의 기준금리 Curve가 상당히 낮아져서 Range Note의 하한 범위(3.75%)에 비교적 근접해 있기 때문이다. 만일 기준금리가 가치평가 시점의 Curve 보다도 더 낮아진다면 Put 옵션의 가치는 더 가파른 기울기로 증가하여 시장금리가 하락하더라도 Range Note의 가격은 오히려 하락하는 Negative Duration의 현상을 보일 수 있다. 최근 기준금리의 하한 범위가 4%대로 비교적 높은 Range Note에서 이러한 현상이 두드러지고 있는데 여기에 대해서는 다음 장에서 좀더 자세히 검토해 보도록 하겠다.

5. 이자율 변동성의 추정

앞서 이자율의 변동성과 옵션가치 사이에 정의 상관관계가 있음을 보았다. Black 모형하에서 옵션가치는 변동성에 의해 크게 영향을 받기 때문에 이자율 변동성을 어떻게 추정하고 사용하는가는 Range Note의 전체 가치에서 옵션이 차지하는 비중이 작더라도 중요한 이슈가 아닐 수 없다.

알려진 바대로 Black 모형은 변동성이 일정하다는 가정을 하고 있다. 그러나 Black 모형을 사용하더라도 첫째, Range Note에 내재되어 있는 옵션은 만기가 다른 옵션들의 시리즈이며, 둘째 이자율의 변동성은 주식 등과 달리 일반적으로 만기가 긴 경우에는 작고 만기가 짧은 경우에는 크기 때문에 각각의 옵션가치를 계산하기 위해 단일한 변동성 추정치를 모든 옵션에 적용하는 것은 무리가 있다. 이른바 변동성의 기간구조(Term Structure of Volatility)를 추정하고 옵션만기에 해당하는 변동성 추정치를 사용하는 것이 좀더 정확한 방법이라고 할 수 있

다. 그러나 실무적으로는 변동성의 기간구조를 추정하기가 쉽지 않기 때문에 단일한 변동성 추정치를 사용하여 내재옵션의 가치를 평가하고 있다.

이자율의 변동성을 추정하기 위해 다음과 같은 세가지 방법이 쓰일 수 있다.

- Historical Volatility
- Bond Market Implied Volatility
- Interest Derivative Market Implied Volatility

Historical Volatility는 말 그대로 과거 시계열 자료를 이용하여 기준금리의 변동성을 계산하는 방법이다. 과거 시계열 자료의 단순 평균으로부터 구한 변동성을 사용할 수도 있지만 최근에는 EWMA, ARCH, GARCH등과 같이 좀더 정교한 방법들이 사용되고 있다. 시계열 자료를 이용한 변동성의 추정에는 해결해야할 계량경제학적 이슈들이 있을 뿐더러 본 보고서의 주된 관심사는 아니므로 여기서는 나머지 2가지 방법에 대해서만 알아보려고 한다.

Bond Market Implied Volatility

Bond Market Implied Volatility는 채권의 시장 거래가격에 내재되어 있는 이자율 변동성을 의미한다. Range Note가 시장에서 활발히 거래된다면 거래된 시장가격으로부터 순수한 옵션의 가치를 분리하고 여기에 내재되어 있는 변동성을 추정하여 유사한 구조의 Range Note의 가격결정에 사용하는 방법이다. 내재 변동성을 추정하는 과정은 다음과 같다.

Step 1 : 순옵션가치의 계산

식 (2.1)을 변형하면 시장거래 가격에 내재되어 있는 순 옵션의 가치는 다음과 같다.

$$\left(\sum P_{DigitalCall} + \sum P_{DigitalPut} \right) = P_{PremiumBond} - P_{RangeNote} \tag{4.1}$$

위 식에서 Premium Bond의 가격은 동일만기 고정금리채의 YTM으로 쉽게 계산할 수 있으므로 이렇게 구한 Premium Bond의 가치에서 거래된 Range Note의 가치를 차감하면 순 옵션가치를 구할 수 있다.

Step 2 : 순 옵션가치로부터 내재 변동성 역산

식 (2.2)을 보면 옵션의 가치는 변동성의 함수로 표현되어 있음을 알 수 있다. Forward Rate은 시장에서 관찰가능하고 기타 변수들은 발행조건으로부터 구할 수 있으므로 식 (2.2)에서 우변의 옵션가치는 오로지 변동성의 함수가 된다. Step 1에서 이미 순옵션가치는 구했으므로 식 (4.1)을 만족시키는 변동성을 Trial and Error 방법으로 구할 수 있다. 즉 다음을 만족시키는 단일한 σ 를 찾을 수 있다.

$$\begin{aligned}
 \text{Total Option Premium} &= \sum C_i + \sum P_i \\
 \text{where, } C_i &= Ke^{-rt} N(d) \\
 P_i &= Ke^{-rt} N(-d) \\
 d &= \frac{\ln(f_{t-1,t} / X) - \sigma^2 / 2t}{\sigma \sqrt{t}} \tag{4.2} \\
 N(\cdot) &: \text{Cumulative Normal Density Function} \\
 K &= F(\text{Coupon}_H - \text{Coupon}_L) / m
 \end{aligned}$$

Numerical Example 2 : 내재 변동성 계산

Range Note의 시장거래가 발견되었을 때 시장거래 가격으로부터 이자율 옵션의 내재 변동성을 구하는 구체적인 과정을 살펴보자.

(표 3) Range Note(LG카드 982회)의 거래정보

2003-02-04 Range Note 시장 거래정보	
종목명	LG카드 982회
상환일	2004-09-30
이자지급 조건	
If 4.15% =< CD91 =< 6.10% then	6.10%
Else	1.00%
시장 거래가격(A)	10121.80
동일만기 고정금리채 YTM	5.09%
표면금리 6.10%인 LG카드 고정금리채 가격(B)	10219.45
내재 옵션가치(B-A)	97.65

2003년 2월 4일, Range Note인 LG카드 982회는 세전 거래가 기준으로 10121.80에 거래되었다. 이 채권의 만기는 2004년 9월 30일(잔존만기 약 1년 8개월)이며 이자지급 조건은 위의 표 3에 나와 있는 바와 같다. 동일만기 LG카드 고정금리채의 YTM은 거래 당시 5.09%정도로 평가되었다. Range Note에 내재된 표면금리 6.10%인 Premium Bond의 미래 현금흐름을 YTM 5.09%로 할인하게 되면 대략 10219.45원이 된다. 따라서 Range Note에 내재된 옵션의 순가치는 Premium Bond의 가격과 시장 거래가격의 차이, 10219.45 - 10121.80 = 97.65원이 된다는 것을 쉽게 알 수 있다.

계산된 시장 옵션가치를 이용하여 내재되어 있는 변동성을 구하는 과정이 표4에 제시되어 있다. 구하는 과정 자체는 주식 옵션에서 내재 변동성을 구하는 과정과 완전히 동일하다. 즉, 임의의 변동성 값을 대입하여 이론 옵션가치를 계산한 후 이를 시장 옵션가치와 비교하여 다를 경우 다른 임의의 변동성 값을 대입한다. 이러한 과정을 시장 옵션가치와 이론 옵션가치가 같아 질 때까지 반복적으로 되풀이하여 최종적으로 얻어지는 값이 내재 변동성이다. 이 예에서는 이러한 과정을 통해서 구해진 내재 변동성은 9.24%이며 이 값을 이용하여 다른 Range Note의 가치를 평가할 수 있다.

(표 4) Implied Volatility의 계산

이자지급일	잔존만기	Spot Rate	Call	Put	Call + Put
2003-03-30	0.15	4.43%			
2003-06-30	0.40	4.47%	0.00	9.42	9.42
2003-09-30	0.65	4.49%	0.01	13.50	13.51
2003-12-30	0.90	4.51%	0.07	15.70	15.77
2004-03-30	1.15	4.53%	0.30	16.99	17.29
2004-06-30	1.40	4.55%	0.80	17.69	18.49
2004-09-30	1.65	4.57%	1.11	22.06	23.17
변동성					9.24%
이론 옵션가치 (A)					97.65
시장 옵션가치 (B)					97.65
차이 (A-B)					0.00

Bond Market Implied Volatility	9.24%
	97.65
	97.65
	0.00

Interest Rate Derivative Market Implied Volatility

Bond Market Implied Volatility는 채권시장의 거래가격으로부터 구하기 때문에 채권 시장 참가자들의 기대가 반영된 추정치라고 장점이 있다. 그러나 유동성이 낮을 경우에는 사용하기 힘들다는 점, 거래가격의 적절성 여부를 판단해야 한다는 점 등의 단점이 있다. 이러한 단점을 극복하기 위해서 사용되는 변동성 추정치가 Interest Rate Derivative Market Implied Volatility이다. 이자율 Cap, Floor 시장이나 Swaption 시장과 같은 이자율 파생상품 시장에서는 일반적으로 가격호가 대신 만기별 이자율의 변동성으로 호가되기 때문에 시장 참가자들의 이자율 변동성에 대한 기대를 직접적으로 관찰할 수 있다는 장점이 있다. 아래의 그림6은 블룸버그가 제공하는 원화 이자율 파생상품 시장의 변동성 호가를 보여주고 있다. 왼쪽은 외환은행이 고시하는 이자율 Cap, Floor의 만기별 매수매도 변동성 호가이며, 오른쪽은 PREBON YAMANE이 제공하는 원화 이자율 Swaption의 만기별 매수매도 변동성 호가이다. 이러한 변동성의 매수매도 호가를 직접적으로 이용하여 Range Note의 가치를 평가할 수도 있으나 이자율 파생상품 시장 역시 유동성이 풍부하지 못한 단점을 가지고 있다.

(그림 6) 이자율 파생상품 시장의 이자율 변동성 호가

19:55 KRW CAPS/FLOORS VOLATILITY				19:58 PREBON YAMANE ASIA REGION			
KOREA EXCHANGE BANK				KOREAN SWAPTION VOLATILITIES			
DESCRIPTION	BID	ASK	TIME	TERM	BID	ASK	TIME
CAP				1 Year			
1) 1 Year	15.0000	18.0000	1/28	CP/FL 1)	12.5	15.5	11:38 15)
2) 2 Year	15.0000	18.0000	1/28	3 M 2)	12.5	15.5	8:12 16)
3) 3 Year	15.0000	18.0000	1/28	6 M 3)	12.0	15.0	8:13 17)
4) 4 Year	14.0000	18.0000	1/28	1 Y 4)	13.5	16.5	8:13 18)
5) 5 Year	14.0000	18.0000	1/28	2 Y 5)	13.5	16.5	8:13 19)
FLOOR				2 Year			
6) 1 Year	15.0000	18.0000	1/28	3 Y 6)	13.5	16.5	8:13 20)
7) 2 Year	15.0000	18.0000	1/28	5 Y 7)	12.0	15.0	8:14 21)
8) 3 Year	15.0000	18.0000	1/28	3 Year			
9) 4 Year	14.0000	18.0000	1/28	CP/FL 8)	13.0	16.0	8:14 22)
10) 5 Year	14.0000	18.0000	1/28	3 M 9)	14.0	17.0	8:13 23)
				5 Year			
				CP/FL 10)			
				1 Y 11)			
				2 Y 12)			
				3 Y 13)			
				5 Y 14)			

6. Range Note의 Duration

일반적으로 듀레이션은 이자율 변동에 대한 채권가격의 민감도를 의미한다. 듀레이션은 이자율 Curve가 완전히 평평하고 만기별로 이자율이 평행이동한다는 가정을 바탕으로 계산되는 것이기 때문에 이자율 Curve의 모양변화(Steepening, Flattening)에 의해 영향을 받는 Structured Note에는 적용이 쉽지 않은게 일반적이다. 특히 FRN에 듀레이션의 개념을 적용하려면 기준금리 변화에 대한 채권가격의 민감도를 의미하는지, 발행사 YTM 변화에 대한 채권가격의 민감도를 의미하는지 명확히 해야 하기 때문에 다양한 듀레이션이 계산될 수 있다. 또 고정금리채의 듀레이션처럼 일반적인 계산방법은 사용될 수 없으며 사용된 가격결정 모형에 따라 서로 다른 값을 나타낼 수도 있다. 따라서 FRN에 듀레이션의 개념을 적용할 때는 명확한 정의하에서 제한적으로만 사용할 수 있다.

여기서는 Range Note의 듀레이션을 Implied Forward Rate의 변화에 대한 Range Note의 가격 민감도로 정의하고 Range Note의 듀레이션이 갖는 특성을 살펴보자. Forward Rate의 변화에 대한 민감도로 정의한 이유는 Range Note에 내재되어 있는 옵션의 기초자산이 Forward Rate이기 때문이다. 더불어 논의를 간단히 하기위해 Range Note에 내재되어 있는 고정금리채 (Premium Bond)의 YTM도 Forward Rate의 변화와 동일하게 움직인다고 가정한다. 즉 Implied Forward Rate가 만기에 상관없이 10bp 상승하면 발행사의 YTM도 10bp 상승한다는 가정이다. 앞서 Range Note의 가격은 다음과 같이 표현될 수 있음을 살펴보았다.

$$P_{RangeNote} = P_{PB} - \sum (P_{Call} + P_{Put}) \quad (5.1)$$

즉, Range Note는 일종의 포트폴리오로 간주할 수 있으므로 Range Note의 듀레이션은 Premium Bond, Digital Call, Digital Put 듀레이션의 가중평균이라고 할 수 있다.

$$\begin{aligned} D_{RangeNotes} &= \frac{P_{PB}}{P_{RangeNotes}} \times D_{PB} - \left[\frac{\sum (P_{Call} \times D_{Call})}{P_{RangeNotes}} + \frac{\sum (P_{Put} \times D_{Put})}{P_{RangeNotes}} \right] \\ &= \frac{P_{PB}}{P_{RangeNotes}} \times D_{PB} - \frac{\sum (\Delta_{Call} + \Delta_{Put})}{P_{RangeNote}} \end{aligned} \quad (5.2)$$

식 (5.2)가 의미하는 바는 Range Note의 듀레이션이 고정금리채의 듀레이션과 옵션 델타(기초 자산 가치변화에 대한 옵션의 가치변화)의 가중평균이라는 것이다. 식 (5.2)에서 놀라운 것은 Range Note의 만기가 비교적 짧아서 내재된 고정금리채의 듀레이션이 작은 값을 갖고, 옵션이 At-The-Money 상태에 있어서 옵션의 델타가 큰 때는 Negative 듀레이션이 나올 수도 있다.

Numerical Example 3 : Range Note의 듀레이션

다음과 같은 발행 조건을 가지고 있는 Range Note의 가격 민감도를 2003년 2월 19일 시점에서 살펴보자.

- 발행등급 : 공사채 AAA
- 만기 : 2005년 10월 1일
- 연간 이자지급 횟수 : 4회 (3개월 이표채)
- 이자지급 조건 : *If* $4.35\% \leq CD91 \leq 6.50\%$ *then* 6.5%, *Else* 1.0%
- 변동성 : 15%
- 동일만기 고정금리채의 YTM : 5.05%

2003년 2월 19일 시점의 CD금리의 연속복리형 Spot Rate과 Forward Rate는 그림7의 A와 같이 추정되었다. 당시의 CD91일 금리는 4.54%로 기준금리 범위의 하한 4.35%에 매우 근접해 있었다. 이상과 같은 Data를 이용하여 Forward Rate의 변화에 대한 옵션가치의 변화를 나타낸 것이 그림7의 B이다. 그림7의 B는 당시의 금리 수준이 매우 낮아서 Digital Call 옵션의 가치는 매우 낮은 반면 Digital Put 옵션의 가치는 매우 높은 상황을 반영하고 있다. 즉, 기준금리가 하한 금리수준에 매우 가까워서 기준금리 변화에 대한 Digital Put 옵션가치의 기울기가 상당히 큰 값을 갖게 되며 이는 Put의 델타가 크다는 것을 의미한다. 기준금리가 10bp 상승하게 되면 Digital Put 옵션의 가치는 496원에서 431원으로 약 65원이 하락하며, Digital Call 옵션의 가치는 47원에서 57원으로 10원 상승한다. 이는 만약 발행사의 YTM이 변하지 않았다면 기준금리의 10bp 상승으로 인해 Range Note의 가격이 $65 - 10 = 55$ 원 증가한다는 것을 뜻한다.

(그림 7) 기준금리 변화에 따른 내재 옵션가치의 변화

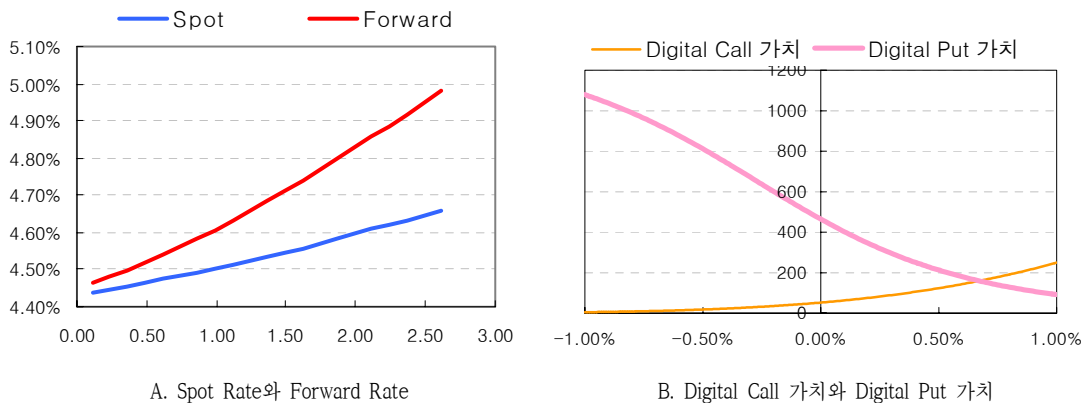
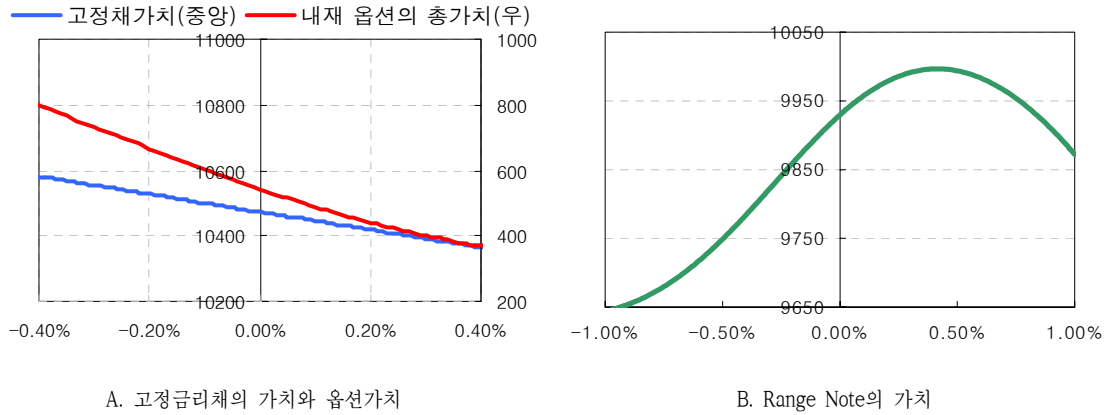


그림8의 A는 기준금리 변화에 대한 고정금리채의 가치 변화와 내재 옵션의 총가치 변화를 보여 주고 있다. 옵션가치의 기울기(민감도)가 고정금리채 가치의 기울기(민감도)에 비해 매우 크다는 것을 알 수 있다. 한편 그림8의 B는 기준금리 변화에 대한 Range Note의 가격변화를 나타

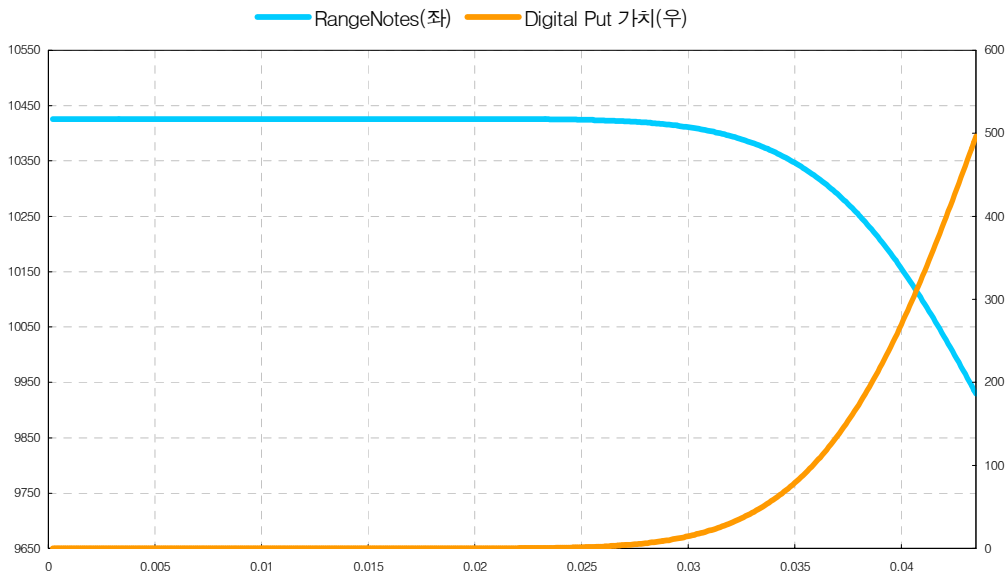
(그림 8) 기준금리 변화에 따른 Range Note의 가격변화



내고 있다. 그림8의 B에서 명확히 알 수 있는 것은 금리가 상승할 경우 Range Note의 가격도 상승하며, 금리가 하락할 경우 Range Note의 가치도 하락한다는 사실이다. 이와 같이 Negative 듀레이션을 갖는 이유는 전술한 바와 같이 CD91일 금리수준이 기준금리의 하한 범위에 매우 근접해 있어서 Put의 가치가 커져 버렸기 때문이다. Put의 가치가 커진다는 것은 Range Note 가치의 하락을 의미하는데 금리의 하락으로 인한 고정금리채의 가치 상승분으로는 Put 가치의 상승분을 상쇄시키지 못해서 Range Note의 가치는 하락하게 된다. 반대로 기준금리가 상승하는 때에는 ATM에 있는 Put의 가치가 급격히 하락하기 때문에 고정금리채의 가치 하락분을 매우고도 남을 정도여서 Range Note의 가격은 상승하게 된다.

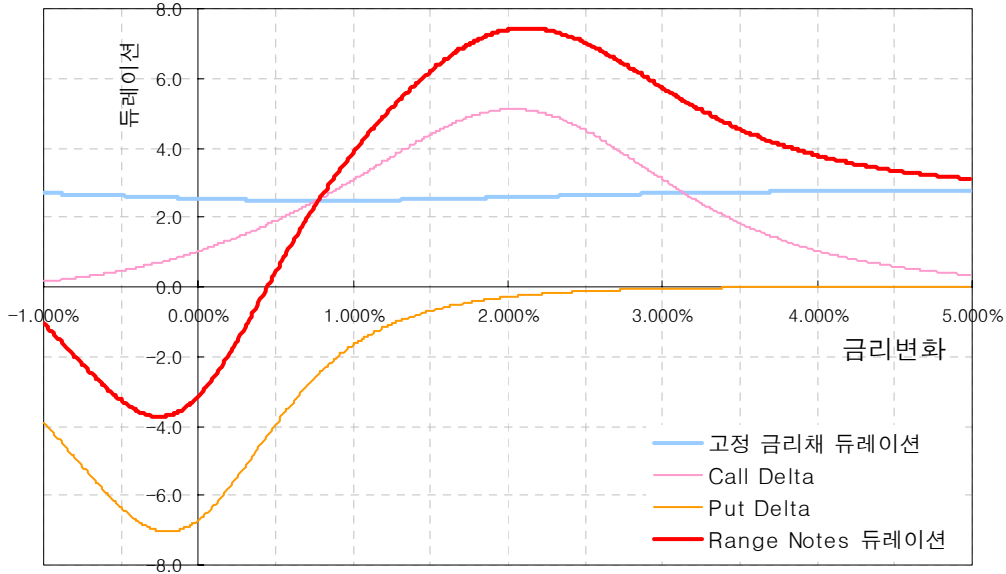
만일 기준금리의 하한범위가 4.35% 보다 작다면 어떻게 될 것인가? 그림9는 기준금리의 하한 범위(Lower Bound)가 현재의 4.35%보다 낮을 때 Range Note의 가치와 Put 옵션의 가치가 어

(그림 9) 기준금리의 하한범위 변화에 따른 Range Note의 가격 변화

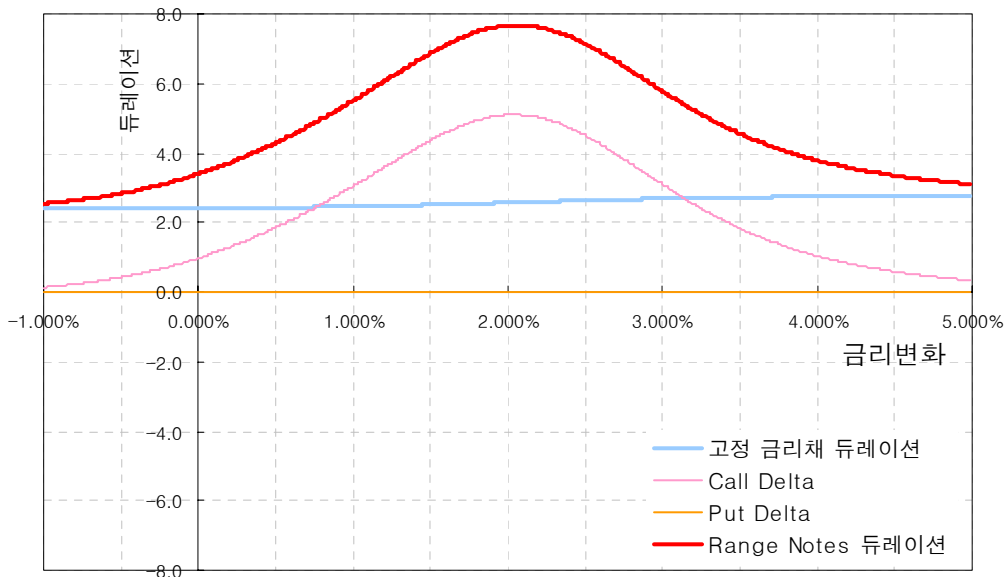


떨게 변하는 지를 보여주고 있다. 하한 범위의 값이 작아져서 Range가 커질수록 Put 옵션의 가치는 급격히 하락하여 Range Note의 가치는 급격히 상승한다는 사실을 알 수 있다.

(그림 10) 기준금리 변화에 따른 Range Note 듀레이션의 변화



A. 기준금리 하한이 4.35%인 Range Note의 듀레이션 변화



B. 기준금리의 하한이 0%인 Range Note의 듀레이션 변화

그림10의 A는 금리 변화에 따른 고정금리채 듀레이션 변화, 옵션 델타의 변화(옵션 감마), Range Note 듀레이션 변화를 보여준다. 그림에서 보듯이 현 금리상태에서는 Range Note의 듀레이션이 음수(약 -3.14)를 가지며 금리가 현 수준에서 약 50bp 가량 상승하게 되면 다시

양의 듀레이션을 갖게 된다는 것을 알 수 있다. 소폭의 금리변화(-1% ~ 1%)에 대해서 Range Note의 듀레이션 변화 모양은 Digital Put의 델타 변화 모양과 거의 동일하다. 이는 기준금리와 하한 금리가 비슷한 저금리 상태에서는 Range Note의 가격변화에 가장 큰 영향을 주는 요인은 내재되어 있는 Digital Put 옵션임을 의미한다. 또 금리가 현 수준에서 2%가량 상승하여 Range Note 기준금리의 상한범위에 다다르게 되면 반대로 Digital Call 옵션의 델타 변화 모양과 Range Note의 듀레이션 변화가 거의 동일한 모양을 갖게 된다.

그림10의 B는 다른 모든 조건은 동일하지만 기준금리의 하한범위가 0%인 경우의 듀레이션 변화를 보여주고 있다. 하한범위가 0%인 Range Note는 Digital Put 옵션이 내재되어 있지 않은 것이어서 듀레이션 변화 모양이 Digital Call 옵션 델타의 모양과 거의 동일한 것을 볼 수 있으며 듀레이션이 양수 값을 갖는다. 특징적인 것은 Range Notes의 듀레이션이 동일 만기의 고정 금리채 듀레이션 보다 클 수 있다는 점이다. 현재 기준금리가 Upper Bound에 근접하게 되면 내재된 Call Option의 가치가 커지게 되는데 이는 Range Notes 가격의 하락을 의미한다. 이러한 상황에서 금리가 상승하게 되면 고정 금리채 부분의 가치 하락과 더불어 Call Option의 가치가 상승하기 때문에 Range Notes의 가치는 상대적으로 더 많이 하락하게 되는 것이다. 반대로 이러한 상황에서 금리가 하락하면 Range Notes의 가치는 상대적으로 더 많이 상승하게 된다.

7. 변형구조 : Step-up Range Note

Step-up Range Note는 비교적 최근에 발행되기 시작한 Range Note다. 기존의 Range Note는 기준금리의 범위가 만기까지 변하지 않고 계속되는 구조이지만, Step-up Range Note는 만기 이전에 기준금리의 Range가 넓어지는 구조의 채권이다. 특히 금리의 급락을 반영하여 하한 범위는 0%로 설정되어 Digital Put 옵션이 제거된 채로 발행되는 예가 늘고 있다. Step-up Range Note의 대표적인 예는 다음과 같다.

Step-up Range Note 발행 예 1 : 하한범위가 0%인 경우

- 발행사 : AAA 은행
- 만기 : 6년
- 발행일 : 2003년 2월
- 이자지급 조건 : 직전 이자지급일 전 영업일의 CD91일 금리가 다음 범위 사이에 존재하면 6.25%, 그렇지 않으면 1%
- 기준금리의 범위
 - 1년까지 : 0% ~ 5.30% / 2년까지 : 0% ~ 5.40%
 - 3년까지 : 0% ~ 5.50% / 4년까지 : 0% ~ 5.60%
 - 5년까지 : 0% ~ 6.00% / 6년까지 : 0% ~ 6.20%

Step-up Range Note 발행 예 2 : 하한범위가 0%이 아닌 경우

- 발행사 : AA 카드사
- 만기 : 3년
- 발행일 : 2003년 1월
- 이자지급 조건 : 4 영업일전의 CD91일 금리가 다음 범위 사이에 존재하면 6.55%, 그렇지 않으면 0.1%
- 기준금리의 범위
 - 1년까지 : 3.75% ~ 5.40%
 - 2년까지 : 3.75% ~ 5.60%
 - 3년까지 : 3.75% ~ 5.80%

이러한 Step-up Range Note의 가치평가는 일반적인 Range Note의 가치평가 방법과 동일하다. 다만 각 옵션의 행사가격(X)이 해당 만기(이자지급일)에 적용되는 기준금리 상한범위(Upper Bound)로 바뀔 뿐이다.

References

- Black, F., "The Pricing of Commodity Contracts", Journal of Financial Economics, 1976
Hull, J., "Options, Futures and Other Derivatives", 4 ed., 2000
Reiner, E., and M. Rubinstein, "Unscrambling the Binary Code". Risk Magazine, 1991



대표전화: (02)399-3350
시스템장애: (02)399-3341
평가내용문의: (02)399-3361
고객지원센터 : (02)399-3379/3451
FAX: (02)399-3360
E-Mail: webmaster@koreabp.com