함수의 직교성 정의

함수의 내적의 정의 $< f_1(t), f_2(t) > \equiv \int_{t_1}^{t_2} f_1(t) f_2^*(t) dt$

다음의 복소지수 함수 집합이고

$\phi_n(t) = e^{jnw_0 t}, n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots, \infty \, (w_0 = \frac{2\pi}{T_0})$

서로 직교함을 알 수 있다.

$< \phi_n(t), \phi_m(t) > \; = \int_0^{T_o} \phi_n(t) \phi_m^*(t) dt = \int_0^{T_o} e^{j(n-m)w_0 t} dt$

$< \phi_n(t), \phi_m(t) > \; = \begin{cases} 1 & \text{for } n = m \\ 0 & \text{for } n \neq m \end{cases}$

함수의 푸리에 급수

1. 복소 지수형 표현

$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jnw_o t}, (w_0 = \frac{2\pi}{T_0})$

$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{jwt} df$와 유사하다.

$$c_n = \frac{< x(t), \phi_n(t) >}{\int_0^{T_o} |\phi_n(t)|^2 dt} = \frac{\int_0^{T_0} x(t) \phi_n^*(t) dt}{\int_0^{T_0} 1 dt}$$

$\int_0^{T_0} |\phi_n|^2 dt = \int_0^{T_0} 1\, dt = T_0$는 복소 지수함수의 평균에너지이다.

따라서

$c_n = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) \phi_n^*(t) dt = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) e^{-jnw_0 t} dt$

$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-jwt} dt$와 유사하다.

(원래는 푸리에 급수에서 푸리에 변환을 유도한다.)

2. 삼각 함수형 표현

$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nw_0 t + b_n \sin nw_0 t)$

$$a_n = \frac{< x(t), \cos nw_0 t >}{\int_0^{T_o} |\cos nw_0 t|^2 dt} = \frac{\int_0^{T_0} x(t) \cos nw_0 t\, dt}{\int_0^{T_0} \frac{1}{2}(1 + \cos 2nw_0) dt}$$
$$= \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) \cos nw_0 t\, dt$$

$$b_n = \frac{< x(t), \sin nw_0 t >}{\int_0^{T_o} |\sin nw_0 t|^2 dt} = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) \sin nw_0 t\, dt$$

$$a_0 = \frac{< x(t), 1 >}{\int_0^{T_0} 1\, dt} = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t)\, dt$$

정리하면

삼각 함수형 표현	$x(t)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nw_0t+b_n\sin nw_0t)$ $a_0=\frac{1}{T_0}\int_0^{T_0}x(t)\,dt$ $a_n=\frac{2}{T_0}\int_0^{T_0}x(t)\cos nw_0t\,dt$ $b_n=\frac{2}{T_0}\int_0^{T_0}x(t)\sin nw_0t\,dt$
복소 지수형 표현	$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_ne^{jnw_ot},(w_0=\frac{2\pi}{T_0})$ $c_n=\frac{1}{T_0}\int_0^{T_0}x(t)e^{-jnw_0t}dt$

푸리에 급수 계수의 성질

$x(t)$가 실함수이면 $c_n=c_{-n}^{*}$
$x(t)$가 실함수이면서 우함수라면

$$I_m[c_n]=0\ ,\qquad c_n=c_{-n}$$

$x(t)$가 실함수이면서 기함수라면

$$Re[c_n]=0\ ,\qquad c_n=-c_{-n}$$

Parseval 정리 : 주기신호의 평균전력은 모든 푸리에 계수의 크기의 제곱을 더한 것과 같다.

$$P=\frac{1}{T_o}\int_0^{T_0}|x(t)|^2dt=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|c_n|^2$$

$$c_n=\begin{cases}\frac{1}{2}(a_n-jb_n) & n>0\\ a_0 & n=0\\ \frac{1}{2}(a_n+jb_n) & n<0\end{cases}\quad.\ |c_n|=\frac{1}{2}\sqrt{a^{2_n}+b^{2_n}},\ b_0=0\ \text{단}\ c_0=a_0$$

$$c_n=|c_n|e^{j\theta_n}$$

$$c_{-n}=|c_n|e^{-j\theta_n}$$

$$\theta_n=\tan^{-1}(-\frac{b_n}{a_n})$$

책에 따라 $x(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nw_0t+b_n\sin nw_0t)$ 표현하기도 한다. $\frac{a_0}{2}=\frac{1}{T_0}\int_0^{T_0}x(t)\,dt$

참고 아날로그 및 디지털통신이론 (김명진)
Digital Communication(Bernard Sklar)