

제6장 논리식의 간소화

6.1 2변수 카르노맵

- 동일한 진리표에 대해 대수적으로 나타낼 수 있는 논리식은 여러 가지로 표시
 $\Rightarrow$ 논리식은 불대수의 법칙을 이용하여 간략하게 표현 가능
 $\Rightarrow$ 대수적인 간소화 과정은 특별한 규칙성이 없어 난해
- 논리식을 최소화하는 간단하고 직접적인 수단을 제공하는 시각적인 방법
 $\Rightarrow$ 사각형의 칸으로 구성된 도표로 각 사각형은 최소항을 표시
 $\Rightarrow$ 카르노맵(Karnaugh Map)
- n 개의 변수로 나타낼 수 있는 서로 다른 변수를 갖는 최소항의 수는 2^n 개
 $\Rightarrow$ 2변수일 때 $4(=2^2)$, 3변수일 때 $8(=2^3)$, 4변수일 때 $16(=2^4)$
- 2변수 카르노맵은 그림 6.1의 (a), (b), (c), (d)와 같은 형태로 표시 가능

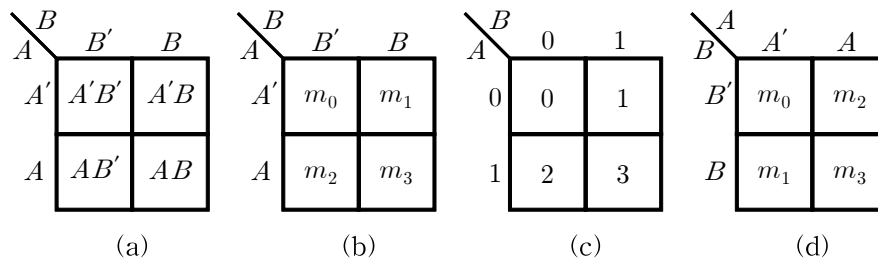


그림 6.1 2변수 카르노맵 표현 방법

- 논리식의 출력이 1이 되는 최소항의 카르노맵에 1, 나머지 빈 칸은 0을 표시
 $\Rightarrow$ 무관항(don't care condition)인 경우에는 X나 d로 표시
 $\Rightarrow$ $A'(B')$ 은 0에 대응하는 변수, $A(B)$ 는 1에 대응하는 변수
- 무관항은 최소항의 변수들이 어떤 값을 취해도 출력에 영향을 주지 않는 항
 $\Rightarrow$ 필요에 따라 1 또는 0을 취하여 논리식을 간소화하는 데 사용
- 그림 6.2는 최소항식(일반항 및 무관항)을 카르노맵에 나타내는 방법을 표시

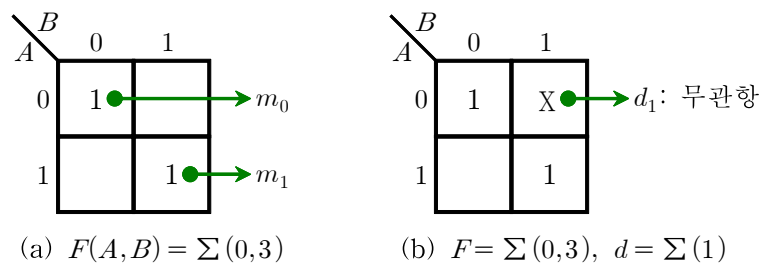
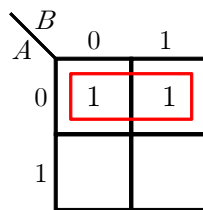


그림 6.2 카르노맵에서 일반항과 무관항의 표시

- 카르노맵에서 인접한 사각형의 최소항을 그룹화(1, 2, 4, 8, 16)하여 간소화
 - ⇒ 그룹화한 사각형의 수가 많을수록 더 적은 변수의 항으로 간소화
 - ⇒ 다른 사각형 그룹에 속한 최소항을 포함하여 그룹화가 가능
 - ⇒ 필요에 따라 무관항을 포함하여 그룹화가 가능
- 그림 6.3과 같이 논리식 $F = A'B' + A'B$ 를 카르노맵을 이용하여 간소화 가능
 - ⇒ 1을 포함하는 맵의 인접한 사각형을 그룹화하여 간소화 수행
 - ⇒ 사각형 그룹에 대응하는 변수값이 다르면 소거하고 같으면 잔류
 - ⇒ 변수값이 0이면 보수형식으로 잔류, 1이면 정규형식으로 잔류
 - ⇒ 사각형 그룹에 의해 소거되고 잔류한 변수들은 AND 연산

그림 6.3 $F = A'B' + A'B$ 의 카르노맵

- 그림 6.3의 사각형 그룹에서 변수 B 는 0과 1로 서로 다르므로 변수 B 는 소거
 - ⇒ 각 사각형에 대응하는 변수 A 는 모두 0이므로 보수형식으로 잔류
 - ⇒ A 는 잔류하고 B 는 소거되므로 논리식은 식 (6.1)과 같이 간소화

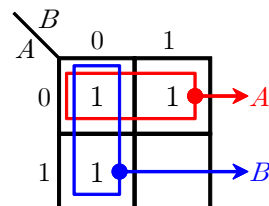
$$F(A, B) = A' \quad (6.1)$$

- 불대수의 법칙에서 $A' + A = 1$ 이므로 인접 사각형의 변수값이 서로 다르면 소거
 - ⇒ 그림 6.3의 카르노맵 방법을 불대수의 법칙을 이용하여 간소화

$$F(A, B) = A'B' + A'B = A'(B' + B) = A' \cdot 1 = A' \quad (6.2)$$

- 그림 6.4와 같이 진리표를 카르노맵으로 작성하고 대응하는 논리식을 간소화
 - ⇒ 각 사각형 그룹에 의해 간소화된 항에 대해 OR 연산을 수행

A	B	F
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

그림 6.4 $F = A' + B'$ 의 진리표와 카르노맵

- 그림 6.4에서 $A'B' = m_0$ 이 중복되어 그룹화된 것을 불대수의 법칙을 통해 확인

$$\begin{aligned}
 F(A,B) &= \sum(0,1,2) = A'B' + A'B + AB' \\
 &= (\underline{A'B'} + A'B) + (\underline{A'B'} + AB') \\
 &= A'(B' + B) + (A' + A)B' \\
 &= A' \cdot 1 + 1 \cdot B' \\
 &= A' + B'
 \end{aligned}$$

【예제 6.1】 다음 논리식을 카르노맵을 이용하여 간소화하여라. 단, d 는 무관항이다.

$$F(A,B) = \sum(0,3), \quad d(A,B) = \sum(2)$$

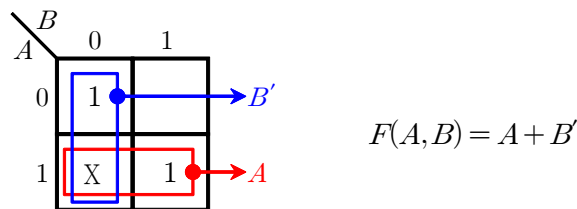


그림 6.5 무관항이 있는 경우의 카르노맵

6.2 3변수 카르노맵

- 3변수 카르노맵은 $8(=2^3)$ 개의 최소항에 대응하는 8개의 사각형으로 구성
 - ⇒ 인접 사각형에 대응하는 변수가 1개만 다르도록 최소항을 배치
 - ⇒ 2개의 변수 BC 에 대해서 00, 01, 11, 10($B'C'$, $B'C$, BC , BC')
 - ⇒ 그림 6.6은 3변수 카르노맵의 여러 가지 표현 방법을 표시

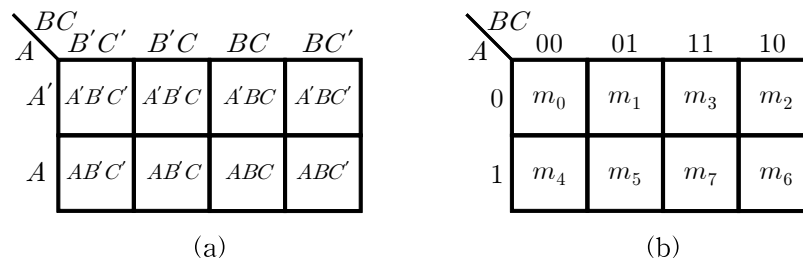
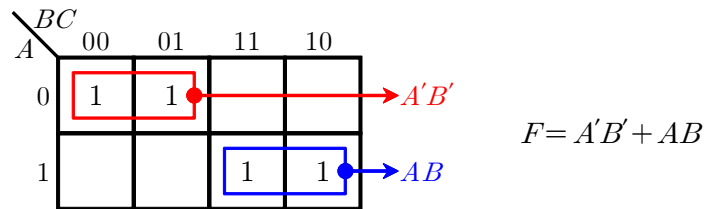


그림 6.6 3변수 카르노맵의 표현 방법

- 그림 6.7의 적색 그룹에서 $A=00$, $B=00$, $C=01$ 이므로 A , B 잔류, C 는 소거
 $\Rightarrow$ 청색 그룹에서 $A=11$, $B=11$, $C=10$ 이므로 A , B 잔류, C 는 소거
 $\Rightarrow$ 각 그룹에서 잔류한 변수는 AND 연산, 그룹 간에는 OR 연산

그림 6.7 $F(A,B,C) = \Sigma(0,1,6,7)$ 의 카르노맵

- 그림 6.8에서 $m_0 = A'B'C'$ 과 $m_2 = A'BC'$ 는 변수 B 만 다르므로 인접한 사각형
 $\Rightarrow$ 그룹화하여 간소화 가능, $A'B'C' + A'BC' = A'C'(B+B) = A'C'$
 $\Rightarrow$ $A=00$, $B=01$, $C=00$ 이므로 A 와 C 는 잔류, B 는 소거

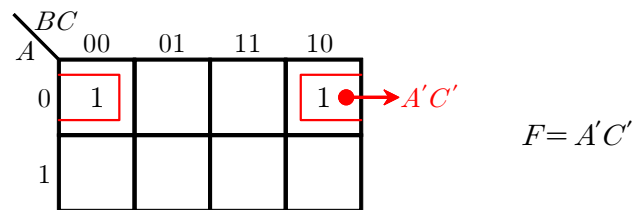


그림 6.8 3변수 카르노맵에서 양쪽 끝을 그룹화

- 그림 6.10과 같이 4개의 인접한 사각형을 한 그룹으로 묶어 간소화가 가능
 $\Rightarrow$ (a)에서 $A=01$, $B=01$, $C=11$ 이므로 A 와 B 는 소거, C 는 잔류
 $\Rightarrow$ (b)에서 $A=00$, $B=01$, $C=01$ 이므로 B 와 C 는 소거, A 는 잔류
 $\Rightarrow$ (c)에서 $A=01$, $B=01$, $C=00$ 이므로 A 와 B 는 소거, C 는 잔류

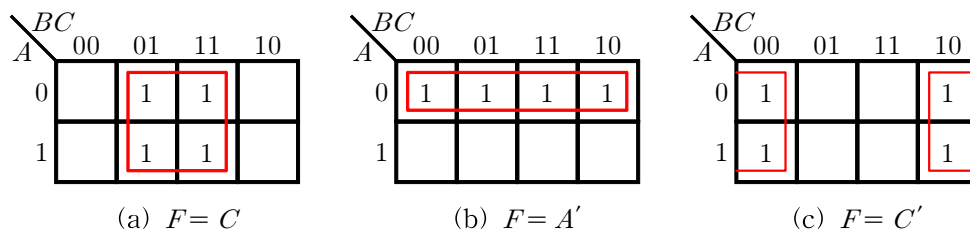


그림 6.10 4개 항을 묶어 간소화하는 예

- 그림 6.11의 카르노맵에서 적색 그룹과 청색 그룹에 대해 간소화를 수행
 $\Rightarrow$ 점선 그룹은 모든 항이 다른 그룹에 포함되었으므로 불필요

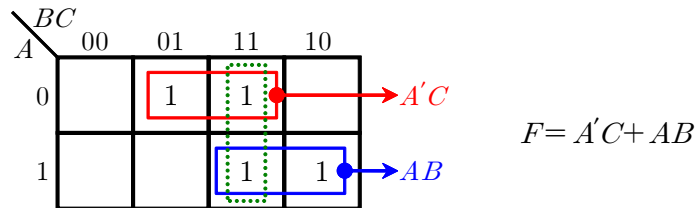


그림 6.11 다른 그룹에 모두 포함되어 중복하지 않는 경우

- 그림 6.12(a)는 4개씩 그룹화하면 정상적으로 간소화를 수행하여 최소화 가능
 $\Rightarrow$ 그림 6.12(b)와 같이 그룹화하면 간소화는 가능하지만 최소화(X)
 $\Rightarrow F = C' + A'C = (C' + A')(C' + C) = A' + C'$ 로 더 간소화가 가능
 $\Rightarrow$ 최소화하려면 그룹화할 때 가능한 한 크게 묶는 것이 필요

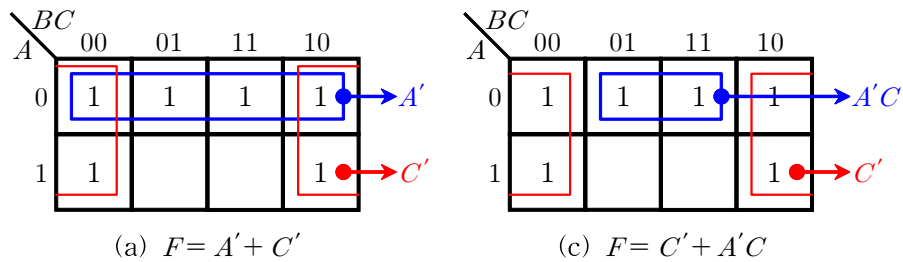


그림 6.12 가능한 한 크게 그룹화해야 최소화 가능

- 그림 6.13과 같이 카르노맵을 이용하여 간소화할 때 3번 중복하여 그룹화 가능

A	B	C	F
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

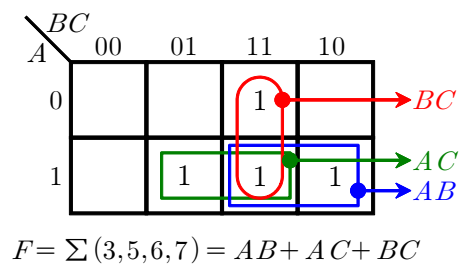


그림 6.13 여러 번 중복하여 그룹에 포함하는 경우

- 3변수 카르노맵에서 묶을 것이 없으면 $F=0$, 8개를 모두 묶으면 $F=1$

6.3 4변수 카르노맵

- 4변수 카르노맵은 $16(=2^4)$ 개의 최소항에 대응하는 8개의 사각형으로 구성
 - $\Rightarrow$ 인접 사각형에 대응하는 변수가 1개만 다르도록 최소항을 배치
 - $\Rightarrow$ 그림 6.15에서 상하(m_1 과 m_9), 좌우(m_4 와 m_6)는 인접 사각형

	CD				
		00	01	11	10
AB	00	$A'B'C'D'$	$A'B'C'D$	$A'B'CD$	$A'B'CD'$
	01	$A'BC'D'$	$A'BC'D$	$A'BCD$	$A'BCD'$
	11	$ABC'D'$	$ABC'D$	$ABCD$	$ABCD'$
	10	$AB'C'D'$	$AB'C'D$	$AB'CD$	$AB'CD'$

(a)

	CD				
		00	01	11	10
AB	00	m_0	m_1	m_3	m_2
	01	m_4	m_5	m_7	m_6
	11	m_{12}	m_{13}	m_{15}	m_{14}
	10	m_8	m_9	m_{11}	m_{10}

(b)

그림 6.14 4변수 카르노맵의 표현 방법

	CD				
		00	01	11	10
AB	00	m_0	m_1	m_3	m_2
	01	m_4	m_5	m_7	m_6
	11	m_{12}	m_{13}	m_{15}	m_{14}
	10	m_8	m_9	m_{11}	m_{10}

그림 6.15 4변수 카르노맵의 상하, 좌우 끝의 연결

【예제 6.2】 다음과 같은 다양한 4변수 카르노맵에서 간소화된 논리식을 구하여라.

	CD				
		00	01	11	10
AB	00				
	01			1	1
	11				
	10				

(a) $F = A'BC$

	CD				
		00	01	11	10
AB	00				
	01				
	11	1			1
	10				

(b) $F = ABD'$

	CD				
		00	01	11	10
AB	00	1			
	01				
	11				
	10	1			

(c) $F = B'C'D'$

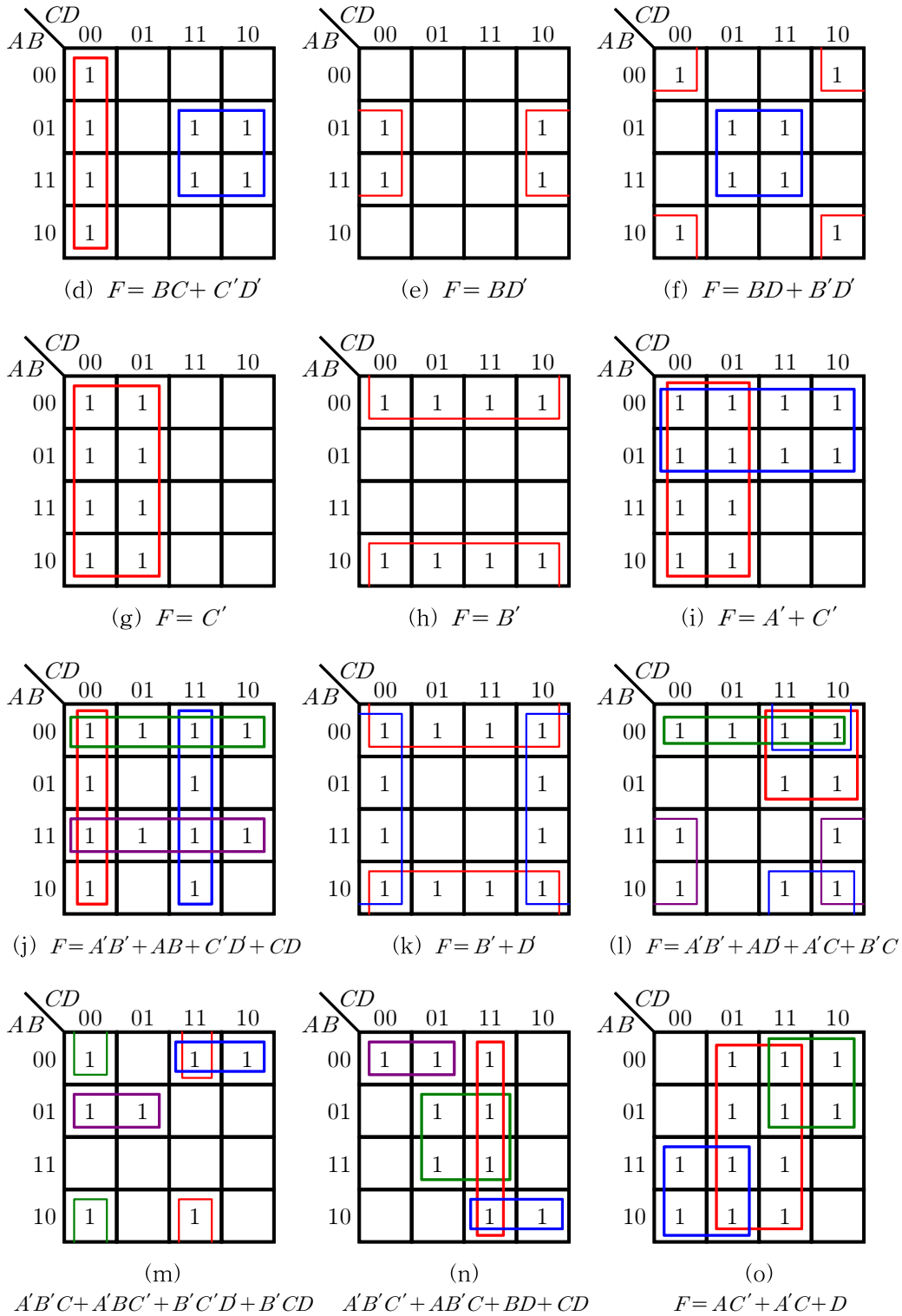


그림 6.16 4변수 카르노맵의 여러 가지 예

【예제 6.3】 다음 식과 같이 무관항이 있을 경우, 카르노맵을 이용하여 간소화하여라.

(a) $F(A,B,C,D) = \Sigma(0,2,3,4,5,11), \quad d(A,B,C,D) = \Sigma(1,7,15)$

(b) $F(A,B,C,D) = \Sigma(1,2,3,4,6,8,10), \quad d(A,B,C,D) = \Sigma(0,12,14)$

(c) $F(A,B,C,D) = \Sigma(0,2,3,4,8,9,11), \quad d(A,B,C,D) = \Sigma(1,5,6,7,10,12)$

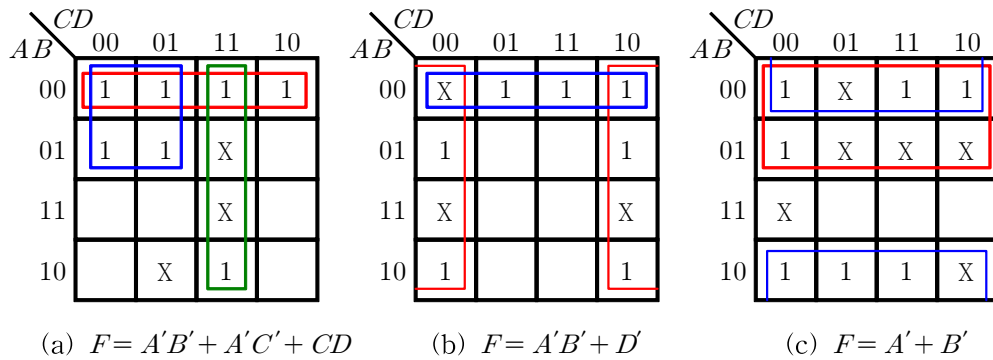


그림 6.17 무관항이 있는 경우 카르노맵의 예

【예제 6.4】 표 6.1의 진리표로부터 카르노맵을 작성하고 간소화하여라.

표 6.3 진리표

A	B	C	D	F
0	0	0	0	X
0	0	0	1	1
0	0	1	0	X
0	0	1	1	1
0	1	0	0	X
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	0	1	1	0
1	1	0	0	0
1	1	0	1	1
1	1	1	0	1
1	1	1	1	0

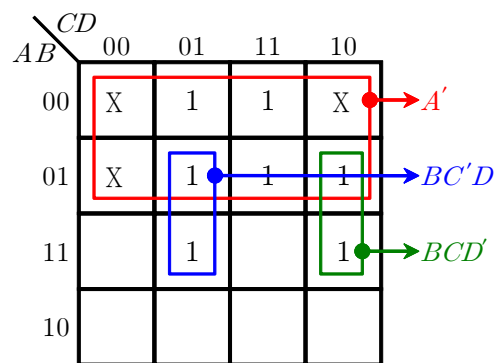


그림 6.18 카르노맵 간소화

6.4 선택적 카르노맵

- 카르노맵에서 그룹화 방법은 다르지만 논리식의 간소화 정도가 같은 경우 존재

BC	00	01	11	10
A				
0			1	1
1	1	1	1	

(a) $F = A'B + AB' + AC$

BC	00	01	11	10
A				
0			1	1
1	1	1	1	

(b) $F = A'B + AB' + BC$

그림 6.19 3변수에서 선택적 카르노맵의 예

CD	00	01	11	10
AB				
00		1	1	
01				
11	1	1	1	1
10			1	

(a) $F = AB + A'B'D + ACD$

CD	00	01	11	10
AB				
00		1	1	
01				
11	1	1	1	1
10			1	

(b) $F = AB + A'B'D + B'CD$

그림 6.20 4변수에서 선택적 카르노맵의 예

CD	00	01	11	10
AB				
00	X	X	1	X
01	1	X		X
11	X	1	1	X
10	X			

(a) $F = A'B' + AB + BC'$

CD	00	01	11	10
AB				
00	X	X	1	X
01	1	X		X
11	X	1	1	X
10	X			

(b) $F = A'B' + AB + A'C'$

CD	00	01	11	10
AB				
00	X	X	1	X
01	1	X		X
11	X	1	1	X
10	X			

(c) $F = A'B' + AB + BC'$

CD	00	01	11	10
AB				
00	X	X	1	X
01	1	X		X
11	X	1	1	X
10	X			

(d) $F = A'B' + AB + A'D'$

CD	00	01	11	10
AB				
00	X	X	1	X
01	1	X		X
11	X	1	1	X
10	X			

(e) $F = A'B' + AB + C'D'$

그림 6.21 무관항이 있는 경우 5가지 선택적 카르노맵

【예제 6.5】 다음 무관항이 있는 논리식을 2가지 선택적 카르노맵으로 간소화하라.

$$F(A,B,C,D) = \sum(0,2,3,4,5,11), \quad d(A,B,C,D) = \sum(1,7,9,15)$$

AB \ CD				
	00	01	11	10
00	1	X	1	1
01	1	1	X	
11			X	
10		X	1	

(a) $F = A'B' + A'C' + CD$

AB \ CD				
	00	01	11	10
00	1	X	1	1
01	1	1	X	
11			X	
10		X	1	

(b) $F = A'B' + A'C' + B'D$

그림 6.22 무관항이 있는 경우 카르노맵의 예

6.5 논리식의 카르노맵 작성

- 식 (6.3)을 카르노맵을 이용하여 간소화하기 위해 최소항의 합으로 변환
 $\Rightarrow$ 각 항에 포함되지 않은 변수에 대해 $(A' + A)$ 을 AND 연산
 $\Rightarrow$ 최소항을 카르노맵에 표시하고 그룹화하여 간소화 수행

$$F(A,B,C) = ABC + A'B + A'B' \quad (6.3)$$

$$\begin{aligned} F(A,B,C) &= ABC + A'B(C' + C) + A'B'(C' + C) \\ &= ABC + A'BC' + A'BC + A'B'C' + A'B'C \\ &= A'B'C' + A'B'C + A'BC' + A'BC + ABC \\ &= \sum(0,1,2,3,7) \end{aligned}$$

A \ BC				
	00	01	11	10
0	1	1	1	1
1			1	

$$F = A' + BC$$

그림 6.23 $F = ABC + A'B + A'B'$ 의 카르노맵

- 식 (6.4)의 논리식을 최소항식으로 나타내고 카르노맵에 표시하여 간소화 수행
 $\Rightarrow ABC\bar{D}$ 과 $AB\bar{C}D$ 는 중복되므로 1번씩만 선택

$$F(A, B, C, D) = AB + ABC + A'CD + A'C'D + A'BCD \quad (6.4)$$

$$\begin{aligned} F(A, B, C, D) &= AB(C' + C)(\bar{D} + D) + ABC(\bar{D} + D) + A'(B' + B)CD \\ &\quad + A'(B' + B)C'D + A'BCD \\ &= (ABC' + ABC)(\bar{D} + D) + ABC\bar{D} + ABCD + A'B'CD \\ &\quad + A'BCD + A'B'C'D + A'BC'D + A'BCD \\ &= ABC'\bar{D} + ABC'D + \underline{ABC\bar{D}} + \underline{ABCD} + \underline{ABC\bar{D}} + \underline{ABCD} \\ &\quad + A'B'CD + A'BCD + A'B'C'D + A'BC'D + A'BCD \\ &= ABC'\bar{D} + ABC'D + ABC\bar{D} + ABCD + A'B'CD + A'BCD \\ &\quad + A'B'C'D + A'BC'D + A'BCD \\ &= \Sigma(12, 13, 14, 15, 3, 7, 1, 5, 6) = \Sigma(1, 3, 5, 6, 7, 12, 13, 14, 15) \end{aligned}$$

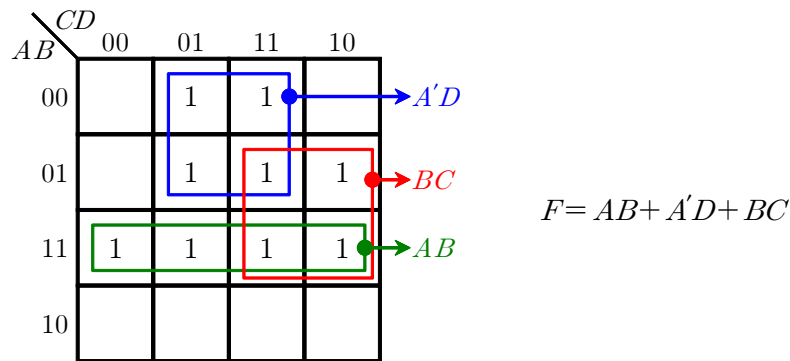


그림 6.24 $F = AB + ABC + A'CD + A'C'D + A'BCD$ 의 카르노맵

- 논리식 $F = A' + AB' + ABC'$ 을 최소항으로 나타내지 않고 직접 카르노맵에 표시
 $\Rightarrow$ 논리식에서 각 항이 $A' = 1$ OR $AB' = 1$ OR $ABC' = 1$ 일 때 $F = 1$
 $\Rightarrow$ B와 C에 상관없이 $A = 0$ 일 때 $A' = 1$ 이므로 그림 6.25(a)로 표시
 $\Rightarrow$ C와 상관없이 $A = 1, B = 0$ 일 때 $AB' = 1$ 이므로 그림 6.25(b)로 표시
 $\Rightarrow$ $A = 1, B = 1, C = 0$ 일 때 $ABC' = 1$ 이므로 그림 6.25(c)로 표시

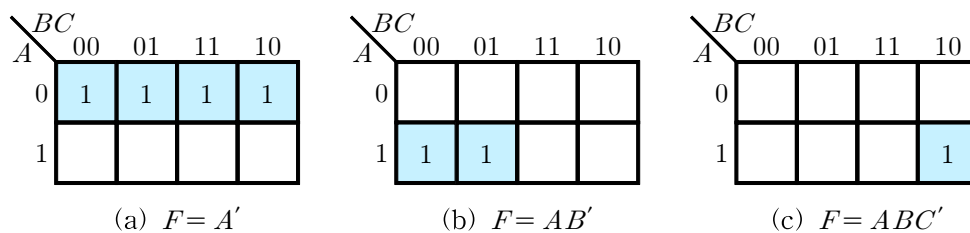


그림 6.25 $F = A' + AB' + ABC'$ 의 각 항에 해당하는 카르노맵

- 그림 6.25의 카르노맵을 하나로 합쳐서 그림 6.26과 같이 표시하고 간소화 수행
 $\Rightarrow$ 중복되는 최소항이 있는 경우는 하나만 표시

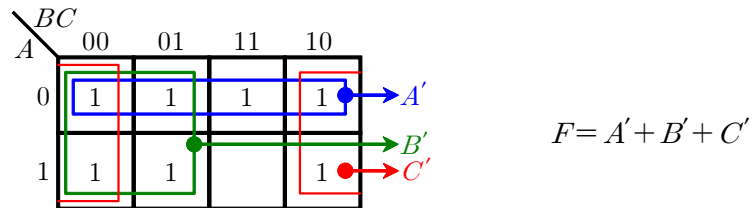
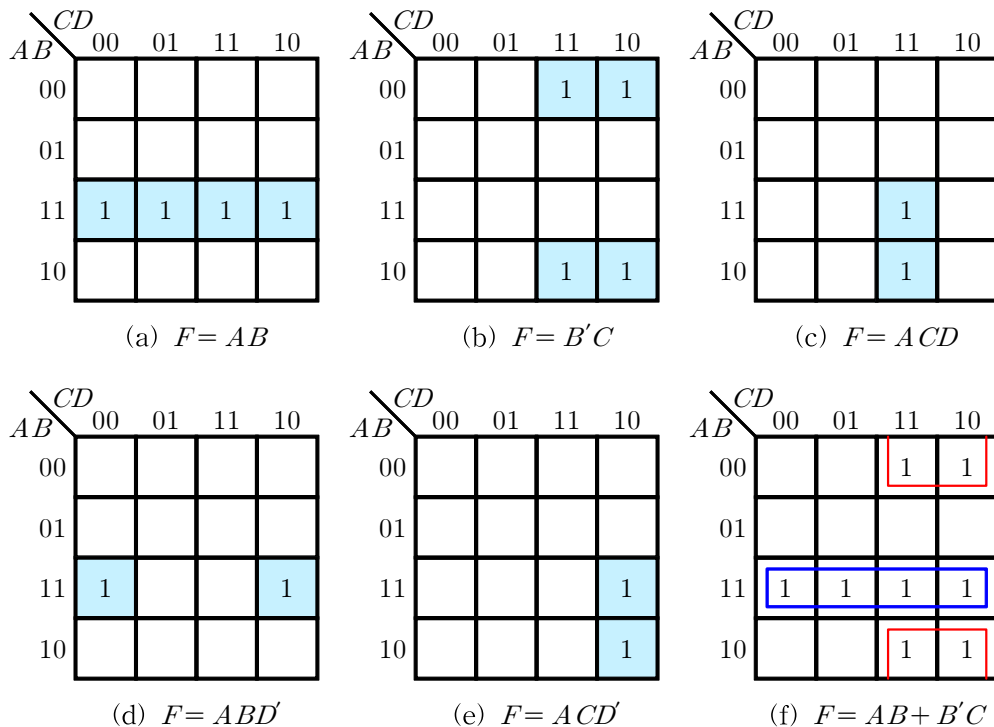


그림 6.26 독립적으로 만들어진 카르노맵의 병합 후 간소화

【예제 6.6】 다음 논리식은 변수 4개로 구성되어 있고, 모든 항이 이미 어느 정도 간소화된 상태다. 더 간소화할 수 있는지 카르노맵을 이용하여 확인해보아라.

$$F = AB + B'C + ACD + ABD' + ACD'$$

그림 6.27 $F = AB + B'C + ACD + ABD' + ACD' = AB + B'C$ 의 간소화 과정

6.6 5변수 및 6변수 카르노맵

- 5변수 맵에서는 $32(=2^5)$ 개의 사각형이 필요하므로 인접 사각형의 취급이 복잡
 - $\Rightarrow A=0$ 인 4변수 맵과 $A=1$ 인 4변수 맵을 각각 작성하고 간소화
 - $\Rightarrow m_5 = A'B'CDE$ 와 $m_{21} = AB'CDE$ 는 변수 1개(A' 과 A)만 상이
 - $\Rightarrow m_5$ 와 m_{21} 는 인접 사각형으로 그룹화하여 변수 A' 과 A 가 소거

		$A = 0$			
		DE			
BC		00	01	11	10
00		m_0	m_1	m_3	m_2
01		m_4	m_5	m_7	m_6
11		m_{12}	m_{13}	m_{15}	m_{14}
10		m_8	m_9	m_{11}	m_{10}

		$A = 1$			
		DE			
BC		00	01	11	10
00		m_{16}	m_{17}	m_{19}	m_{18}
01		m_{20}	m_{21}	m_{23}	m_{22}
11		m_{28}	m_{29}	m_{31}	m_{30}
10		m_{24}	m_{25}	m_{27}	m_{26}

그림 6.28 5변수 카르노맵

【예제 6.7】 다음 5변수 논리함수를 카르노맵을 이용하여 간소화하여라.

$$F(A, B, C, D, E) = \sum(0, 1, 4, 8, 12, 13, 15, 16, 17, 23, 29, 31)$$

		$A = 0$			
		DE			
BC		00	01	11	10
00		1	1		
01		1			
11		1	1	1	
10		1			

		$A = 1$			
		DE			
BC		00	01	11	10
00		1	1		
01				1	
11			1	1	
10					

$$F = A'D'E' + B'C'D' + BCE + ACDE$$

그림 6.29 $F(A, B, C, D, E) = \sum(0, 1, 4, 8, 12, 13, 15, 16, 17, 23, 29, 31)$ 의 카르노맵

- 6변수 맵에서는 $64(=2^6)$ 개의 사각형이 필요하므로 인접 사각형의 취급이 복잡
 $\Rightarrow AB=00, AB=01, AB=10, AB=11$ 인 4변수 맵을 각각 작성
 $\Rightarrow m_{15} = A'B'CDEF$ 와 $m_{31} = A'BCDEF$ 가 B' 과 B 만 다르므로 인접
 $\Rightarrow m_3 = A'B'C'DEF$ 와 $m_{35} = AB'C'DEF$ 가 A' 과 A 만 다르므로 인접

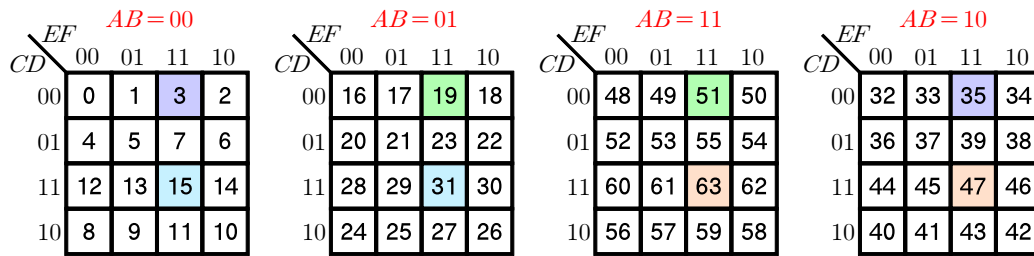
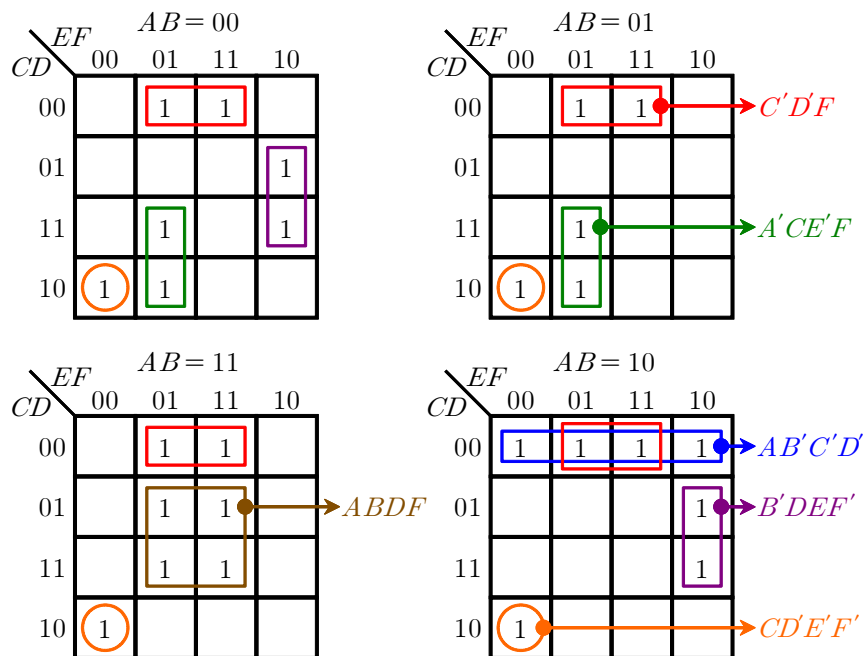


그림 6.30 6변수 카르노맵

【예제 6.8】 다음 6변수 논리함수를 카르노맵을 이용하여 간소화하여라.

$$F(A, B, C, D, E, F) = \sum(1, 3, 6, 8, 9, 13, 14, 17, 19, 24, 25, 29, 32, 33, 34, 35, 38, 40, 46, 49, 51, 53, 55, 56, 61, 63)$$



$$F = ABDF + CDE'F' + C'DF + A'CE'F + B'DEF' + AB'C'D$$

그림 6.31 예제 6.8의 6변수 카르노맵

6.7 NAND와 NOR 게이트로의 변환

- 드모르간의 정리를 이용하면 모든 게이트를 NAND나 NOR 게이트로 표시 가능
 - ⇒ NAND와 NOR 게이트는 AND나 OR보다 논리회로의 구성이 용이
 - ⇒ NAND와 NOR 게이트만으로 모든 회로의 설계가 가능

표 6.2 기본 게이트의 NAND 및 NOR 식

NOT	$A' = (A \cdot A)' = (A + A)'$
AND	$AB = [(AB)']' = (A' + B')'$
OR	$A + B = [(A + B)']' = (A'B')'$
NAND	$(AB)' = [\{(AB)\}]' = [(A' + B')']'$
NOR	$(A + B)' = [\{(A + B)\}]' = [(A'B')']'$
XOR	$A'B + AB' = [(A'B + AB')']' = [(A'B)'(AB')']'$ $= [(A + B')(A' + B)]' = (A + B')' + (A' + B)'$ $= [\{(A + B')' + (A' + B)'\}]'$

- 표 6.3은 기본 게이트들의 논리식을 NAND와 NOR만을 이용하여 나타낸 회로

게이트	NAND 게이트 표현	NOR 게이트 표현
NOT		
AND		
OR		
NAND		
NOR		
XOR		

◎ NAND 게이트만 이용한 회로

- 최소항식을 이중부정하고 드모르간의 정리를 적용하여 NAND만의 회로 구성
 - ⇒ 그림 6.33과 같이 논리식을 간소화하고 AND-OR 회로를 구성
 - ⇒ 그림 6.34와 6.35 같이 AND-OR 회로를 NAND만의 회로로 표시

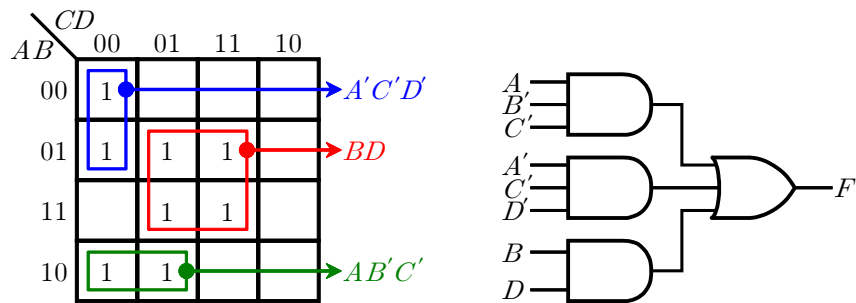


그림 6.33 $F = AB'C' + A'C'D' + BD$ 의 카르노맵과 논리회로

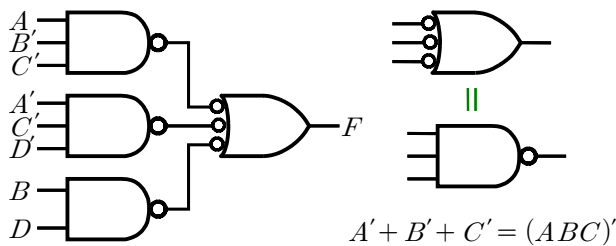


그림 6.34 AND 출력에 이중부정을 한 회로

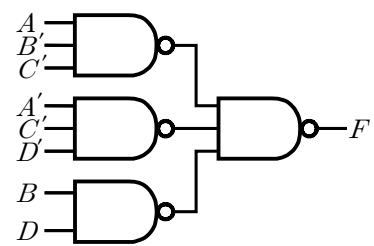


그림 6.35 NAND만의 회로

【예제 6.9】 다음 논리식을 NAND 게이트만 사용하여 설계하여라.

$$F = C'D + ABC' + A'C + B'C = [(C'D + ABC' + A'C + B'C)']$$

$$= [(C'D)' \cdot (ABC')' \cdot (A'C)' \cdot (B'C)']$$

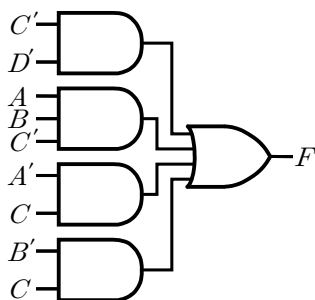


그림 6.36 논리회로

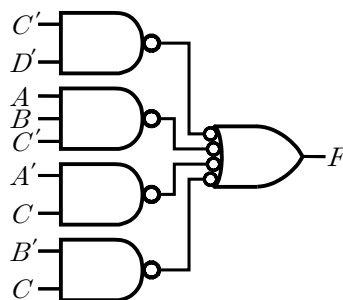


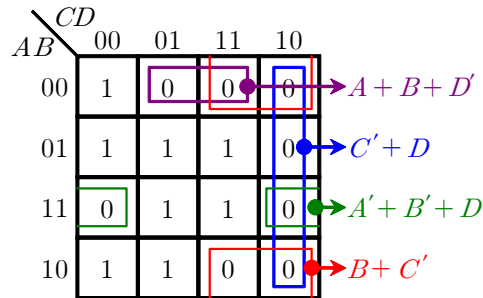
그림 6.37 NAND 게이트만으로 표현한 회로



◎ NOR 게이트만 이용한 회로

- 그림 6.38의 카르노맵에서 0인 항들의 인접 사각형을 그룹화하여 간소화 수행
 $\Rightarrow$ 대응 변수값이 0이면 정규형식, 1이면 보수형식을 취하여 OR 연산

$$F = (B + C')(C' + D)(A + B + D')(A' + B' + D) \quad (6.5)$$



$$F = (B + C')(C' + D)(A + B + D')(A' + B' + D)$$

그림 6.38 카르노맵에서 최대항 묶음

- 식 (6.6)와 같이 0인 항의 인접 사각형을 그룹화하고 간소화하여 F' 을 유도
 $\Rightarrow F'$ 의 보수를 취하여 F 를 구하고 드모르간의 정리를 적용

$$F' = B'C + CD' + A'B'D + ABD \quad (6.6)$$

$$\begin{aligned} F &= (B'C + CD' + A'B'D + ABD)' = (B'C)' \cdot (CD')' \cdot (A'B'D)' \cdot (ABD)' \\ &= (B + C')(C' + D)(A + B + D')(A' + B' + D) \end{aligned}$$

- 식 (6.5)의 논리식을 논리회로로 작성하면 그림 6.39의 OR-AND 회로로 표시
 $\Rightarrow$ 그림 6.40와 6.41 같이 OR-AND 회로를 NOR만의 회로로 표시

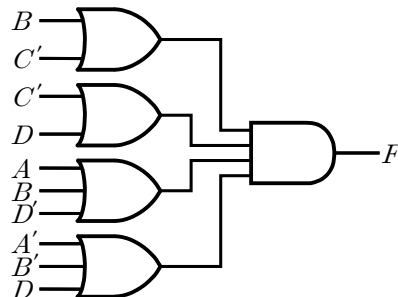


그림 6.39 식 (6.5)의 논리회로

$$\begin{aligned} (F')' &= F = \{[(B + C')(C' + D)(A + B + D')(A' + B' + D)]'\}' \\ &= [(B + C')' + (C' + D)' + (A + B + D')' + (A' + B' + D)]' \end{aligned}$$

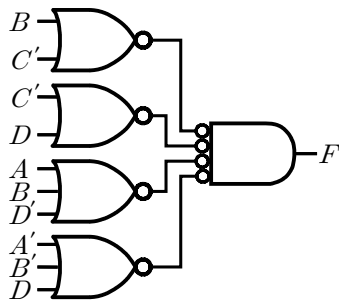


그림 6.40 OR 출력에 이중부정한 회로

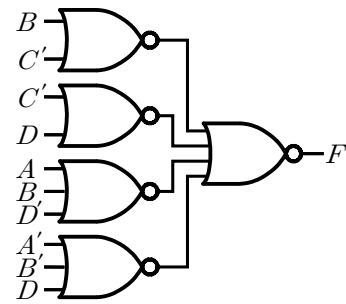
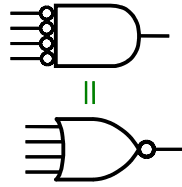
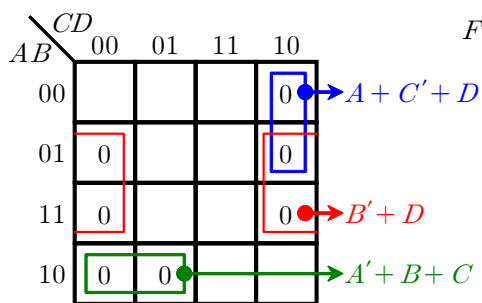


그림 6.41 NOR만의 회로

【예제 6.10】 다음 진리표를 만족하는 논리회로를 NOR 게이트만으로 설계하여라.

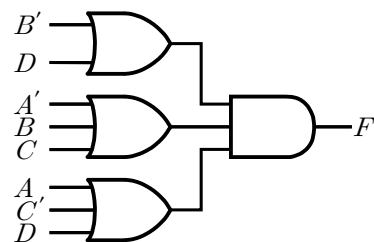
표 6.4 예제 6.10의 진리표

<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>F</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>F</i>
0	0	0	0	1	1	0	0	0	0
0	0	0	1	1	1	0	0	1	0
0	0	1	0	0	1	0	1	0	1
0	0	1	1	1	1	0	1	1	1
0	1	0	0	0	1	1	0	0	0
0	1	0	1	1	1	1	0	1	1
0	1	1	0	0	1	1	1	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1

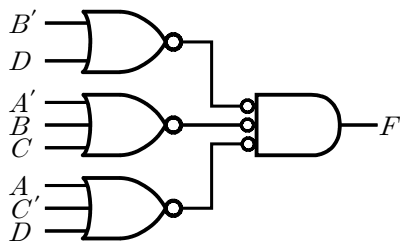


(a) 카르노맵

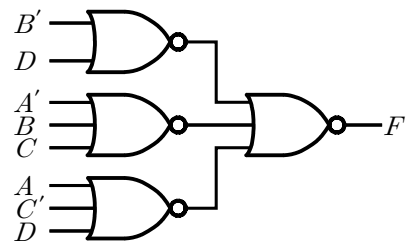
$$F = (B' + D)(A' + B + C)(A + C' + D)$$



(b) OR-AND 회로



(c) OR 출력에 이중부정

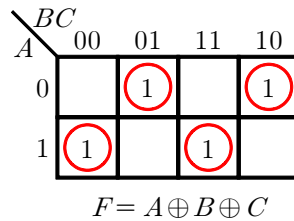


(d) NOR만의 회로

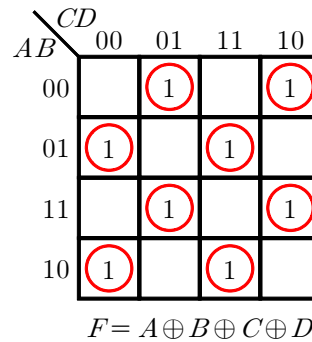
그림 6.42 논리식을 구하고 논리회로로 표현

6.8 XOR와 XNOR 게이트

- 그림 6.43과 같이 XOR는 여러 입력 중에 1이 홀수 개이면 출력이 1인 게이트
 $\Rightarrow$ 카르노맵에 나타난 것처럼 XOR는 인접 사각형이 비존재



(a) 3변수 XOR



(b) 4변수 XOR

그림 6.43 XOR의 카르노맵 표현

$$\begin{aligned}
 F &= A'B'C + A'BC' + AB'C' + ABC = A'(B'C + BC') + A(B'C' + BC) \\
 &= A'(B \oplus C) + A(B \oplus C)' = A \oplus (B \oplus C) = A \oplus B \oplus C
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F &= A'B'C'D + A'B'CD' + A'BC'D + A'BCD' + AB'C'D + AB'CD' \\
 &\quad + ABC'D + ABCD' \\
 &= A'B'(C'D + CD') + AB(C'D + CD') + A'B(C'D' + CD) + AB'(C'D' + CD) \\
 &= (A'B' + AB)(C'D + CD') + (A'B + AB')(C'D' + CD) \\
 &= (A \oplus B)'(C \oplus D) + (A \oplus B)(C \oplus D)' = (A \oplus B) \oplus (C \oplus D) \\
 &= A \oplus B \oplus C \oplus D
 \end{aligned}$$

- 그림 6.44와 같이 XNOR는 입력 중에서 1이 짝수 개이면 출력이 1인 게이트
 $\Rightarrow$ 카르노맵에 나타난 것처럼 XNOR도 인접 사각형이 비존재

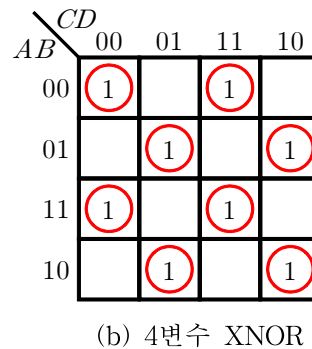
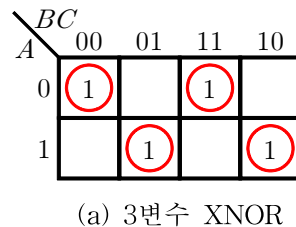


그림 6.44 XNOR 카르노맵의 표현

$$F = A'B'C' + A'BC + AB'C + ABC' = A'(B'C' + BC) + A(B'C + BC') \\ = A'(B \oplus C)' + A(B \oplus C) = (A \oplus B \oplus C)' = A \odot B \odot C$$

$$F = A'B'C'D + A'BCD + A'BC'D + A'BCD' + AB'C'D + AB'CD' \\ + ABC'D + ABCD \\ = A'B'(C'D + CD) + AB(C'D + CD) + A'B(C'D + CD') + AB'(C'D + CD') \\ = (A'B + AB)(C'D + CD) + (A'B + AB')(C'D + CD') \\ = (A \oplus B)'(C \oplus D)' + (A \oplus B)(C \oplus D) = (A \oplus B \oplus C \oplus D)' \\ = A \odot B \odot C \odot D$$

- 그림 6.45는 2개의 항씩 묶어서 그룹화했을 때 XOR나 XNOR가 되는 경우

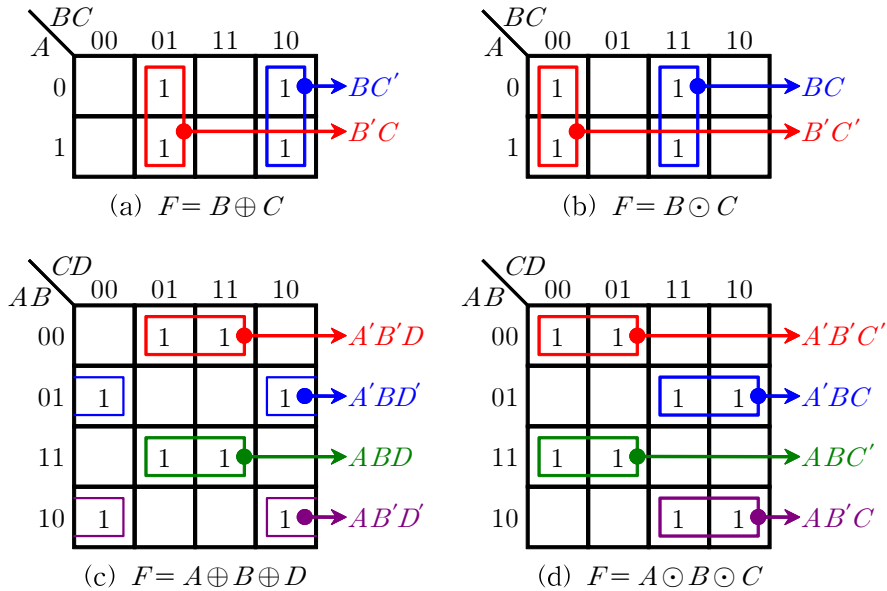


그림 6.45 2개 항을 묶었을 경우 XOR 또는 XNOR 게이트의 카르노맵

$$F = B'C + BC' = B \oplus C$$

$$F = B'C' + BC = (B \oplus C)' = B \odot C$$

$$F = A'B'D + A'BD' + AB'D + ABD = A'(B'D + BD') + A(B'D + BD) \\ = A'(B \oplus D) + A(B \oplus D)' = A \oplus (B \oplus D) \\ = A \oplus B \oplus D$$

$$F = A'B'C' + A'BC + AB'C + ABC' = A'(B'C' + BC) + A(B'C + BC') \\ = A'(B \oplus C)' + A(B \oplus C) = (A \oplus B \oplus C)' \\ = A \odot B \odot C$$

- 카르노맵에서 그룹화하여 소거된 변수를 제외한 나머지 변수의 1의 개수를 고찰
 $\Rightarrow$ 1의 개수가 홀수 개이면 XOR이고, 짝수 개이면 XNOR를 표시
 $\Rightarrow$ 그림 6.45(c)에서 $A'B'D=001$, $ABD=111$ 이므로 1이 홀수 개
 $\Rightarrow$ 그림 6.45(d)에서 $A'B'C'=000$, $A'BC=011$ 이므로 1이 짝수 개

【예제 6.11】 다음 논리함수 F 와 G 를 XOR 게이트 또는 XNOR 게이트로 표현할 수 있는지 알아보아라.

$$F(A,B,C,D) = \sum(1,3,5,7,8,10,12,14)$$

$$G(A,B,C,D) = \sum(0,2,4,6,9,11,13,15)$$

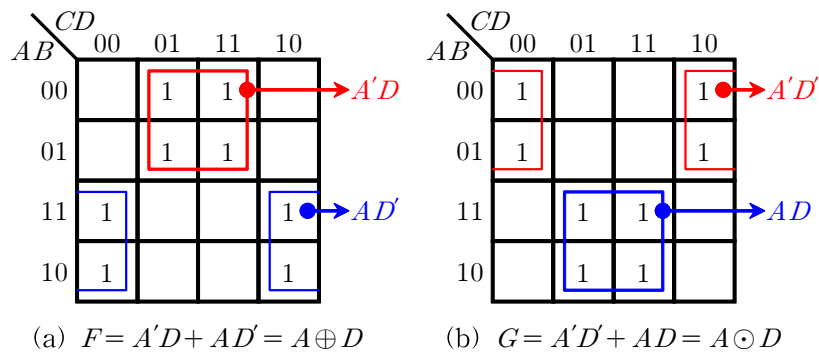


그림 6.46 4개 항을 묶었을 경우 XOR 또는 XNOR 게이트의 카르노맵

- 2입력 XOR 게이트의 출력은 입력된 신호가 서로 다를 때 출력이 1로 표시
 $\Rightarrow$ 배타적 OR(Exclusive OR)
- 그림 6.47은 XOR의 논리식 $F = A'B + AB' = A \oplus B$ 에 대한 논리회로를 표시

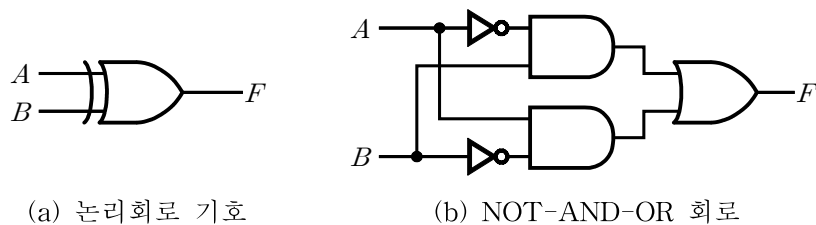


그림 6.47 XOR 게이트의 표현

- XOR 게이트의 불대수식은 식 (6.7)로 표현되며, 논리회로는 그림 6.48)로 표시

$$F = (AB + A'B')' = (AB)'(A'B')' = (AB)'(A + B) = (A + B)(A' + B') \quad (6.7)$$

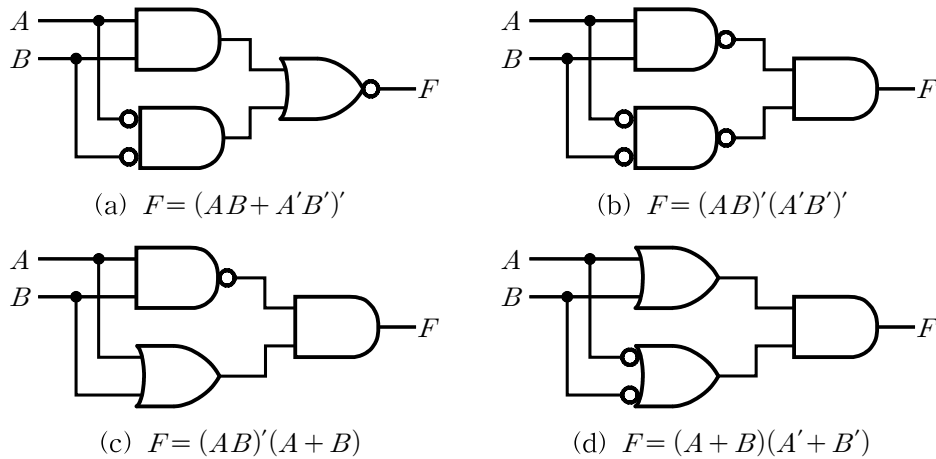


그림 6.48 XOR 게이트의 다른 회로 표현

- 식 (6.7)에 분배법칙을 적용하고 이중부정을 취한 후 드모르간의 정리를 적용
 $\Rightarrow$ 그림 6.49와 같이 XOR를 NAND 게이트만으로 표시 가능

$$\begin{aligned} F &= (AB + A'B')' = (A + B)(AB)' = A(AB)' + B(AB)' \\ &= [\{A(AB)'\} + \{B(AB)'\}]' = [\{A(AB)'\}' \cdot \{B(AB)'\}']' \end{aligned} \quad (6.8)$$

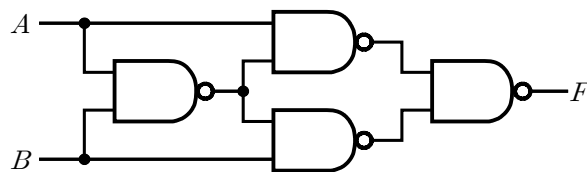


그림 6.49 NAND만으로 XOR 구현