

## 01. 이차함수 $y=ax^2$ 의 그래프

1. 함수  $y=f(x)$ 에서  $y$ 가  $x$ 에 대한 이차식  $y=ax^2+bx+c$  ( $a, b, c$ 는 상수,  $a \neq 0$ )으로 나타내어질 때, 이 함수를  $f$ 를  $x$ 에 대한 **이차함수**라고 한다.

(예)  $y=2x^2$ ,  $y=-x^2+2x-3$ 은 이차함수이다.

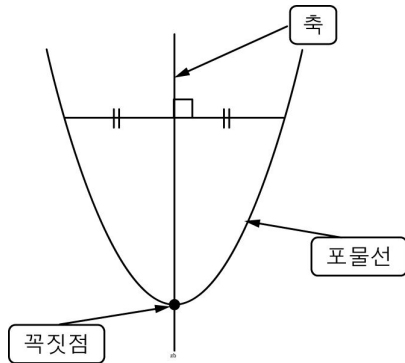
$y=2x-3$ ,  $y=\frac{1}{x^2}+2x+5$ 는 이차함수가 아니다.

2. 포물선의 뜻

(1) **포물선** : 이차함수  $y=x^2$ ,  $y=-x^2$ 의 그래프와 같은 모양의 곡선

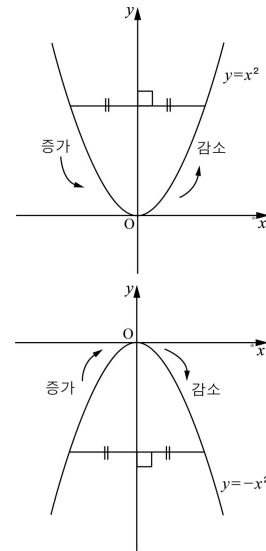
(2) 포물선의 **축** : 포물선은 선대칭 도형으로 그 대칭축

(3) 포물선의 **꼭짓점** : 포물선과 축의 교점



3. 이차함수  $y=x^2$ 과  $y=-x^2$ 의 그래프

|             | $y=x^2$                                                                                            | $y=-x^2$                                                                                         |
|-------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 꼭짓점의 좌표     | 원점 (0,0)                                                                                           | 원점 (0,0)                                                                                         |
| 그래프의 모양     | 아래로 볼록한 포물선                                                                                        | 위로 볼록한 포물선                                                                                       |
| 축의 방정식      | $x=0$ ( $y$ 축)<br>$y$ 축에 대하여 대칭                                                                    | $x=0$ ( $y$ 축)<br>$y$ 축에 대하여 대칭                                                                  |
| 그래프의 증가, 감소 | ① $x < 0$ 일 때 :<br>$x$ 의 값이 증가하면 $y$ 의 값은 감소한다.<br>② $x > 0$ 일 때 :<br>$x$ 의 값이 증가하면 $y$ 의 값도 증가한다. | ① $x < 0$ 일 때 :<br>$x$ 의 값이 증가하면 $y$ 값도 증가한다.<br>② $x > 0$ 일 때 :<br>$x$ 의 값이 증가하면 $y$ 의 값은 감소한다. |
| 치역          | $\{y   y \geq 0\}$                                                                                 | $\{y   y \leq 0\}$                                                                               |



4. 이차함수  $y=ax^2$ 의 그래프의 성질

(1) 꼭짓점의 좌표는 원점 (0,0)이다.

(2)  $y$ 축에 대하여 대칭이다. (축의 방정식  $x=0$ ,  $y$ 축)

(3)  $a > 0$ 이면 아래로 볼록한 포물선이고,  $a < 0$ 이면 위로 볼록한 포물선이다.

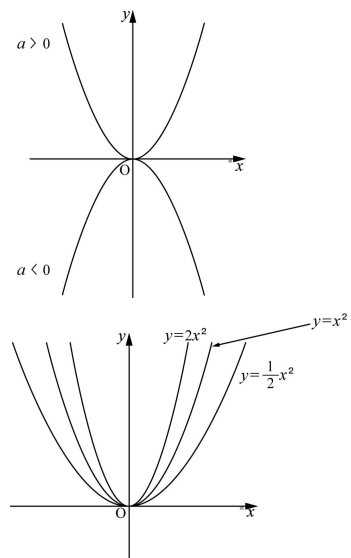
(4)  $a$ 의 절댓값이 클수록 그래프의 폭이 좁아진다.

(5) 이차함수  $y=-ax^2$ 의 그래프와  $x$ 축에 대하여 대칭이다.

(참고) 이차함수  $y=ax^2$ 의 그래프는

①  $a$ 의 부호에 따라 그래프의 모양(볼록한 방향)이 결정된다.

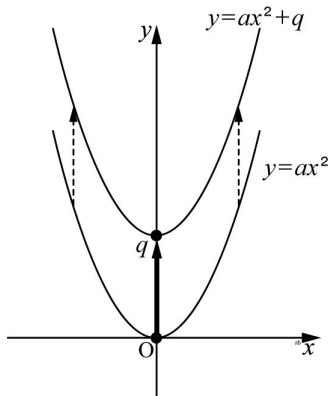
②  $a$ 의 절댓값에 따라 그래프의 폭이 결정된다.



## 02. 이차함수 $y = a(x-p)^2 + q$ 의 그래프

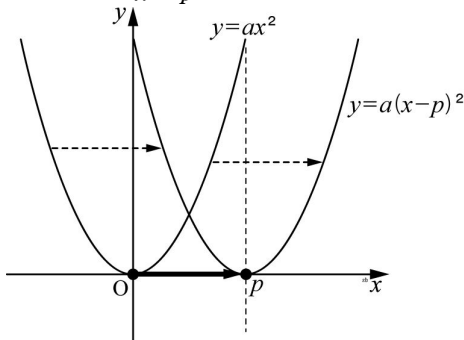
1. 이차함수  $y = ax^2 + q$  ( $a \neq 0$ )의 그래프

- (1) 이차함수  $y = ax^2$ 의 그래프를  $y$ 축의 방향으로  $q$ 만큼 평행이동 한 것이다.
- (2) 꼭짓점의 좌표는  $(0, q)$ 이다.
- (3)  $y$ 축에 대하여 대칭이다. (축의 방정식  $x = 0$ ,  $y$ 축)



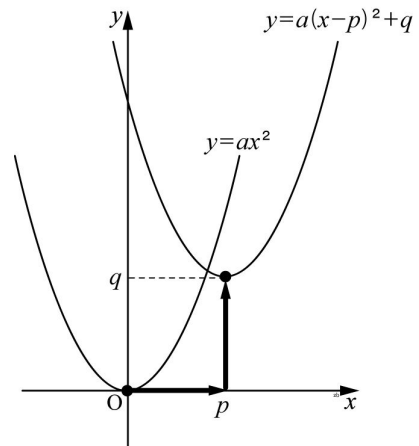
2. 이차함수  $y = a(x-p)^2$  ( $a \neq 0$ )의 그래프

- (1) 이차함수  $y = ax^2$ 의 그래프를  $x$ 축의 방향으로  $p$ 만큼 평행이동 한 것이다.
- (2) 꼭짓점의 좌표는  $(p, 0)$ 이다.
- (3) 축의 방정식은  $x = p$ 이다.



3. 이차함수  $y = a(x-p)^2 + q$  ( $a \neq 0$ )의 그래프

- (1) 이차함수  $y = ax^2$ 의 그래프를  $x$ 축의 방향으로  $p$ 만큼,  $y$ 축의 방향으로  $q$ 만큼 평행이동한 것이다.
- (2) 꼭짓점의 좌표는  $(p, q)$
- (3) 축의 방정식은  $x = p$ 이다.



4. 이차함수  $y = a(x-p)^2 + q$ 의 그래프 그리는 순서

- (1) 이차함수  $y = ax^2$ 의 그래프를 그린다.
- (2)  $x$ 축의 방향으로  $p$ 만큼 평행이동 하여  $y = a(x-p)^2$ 의 그래프를 그린다.
- (3)  $y$ 축의 방향으로  $q$ 만큼 평행이동 하여  $y = a(x-p)^2 + q$ 의 그래프를 그린다.

5. 이차함수  $y = a(x-p)^2 + q$ 의 그래프에서  $a$ ,  $p$ ,  $q$ 의 부호 정하기

- (1)  $a$ 의 부호 : 그래프의 모양에 따라 결정된다.
  - ① 아래로 볼록 :  $a > 0$
  - ② 위로 볼록 :  $a < 0$
- (2)  $p$ 의 부호 : 꼭짓점  $(p, q)$ 의 위치에 따라 결정된다.
  - ① 꼭짓점  $(p, q)$ 가  $y$ 축의 오른쪽에 있을 때 :  $p > 0$
  - ② 꼭짓점  $(p, q)$ 가  $y$ 축의 왼쪽에 있을 때 :  $p < 0$
  - ③ 꼭짓점  $(p, q)$ 가  $y$ 축 위에 있을 때 :  $p = 0$
- (3)  $q$ 의 부호 : 꼭짓점  $(p, q)$ 의 위치에 따라 결정된다.
  - ① 꼭짓점  $(p, q)$ 가  $x$ 축의 위쪽에 있을 때 :  $q > 0$
  - ② 꼭짓점  $(p, q)$ 가  $x$ 축의 아래쪽에 있을 때 :  $q < 0$
  - ③ 꼭짓점  $(p, q)$ 가  $x$ 축 위에 있을 때 :  $q = 0$

## 02. 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 의 그래프

1. 이차함수  $y = ax^2 + bx + c$ 의 그래프

- (1)  $y = ax^2 + bx + c$ 는  $y = a(x-p)^2 + q$ 의 꼴로 고쳐서 그린다.

$$y = ax^2 + bx + c \Rightarrow y = a\left(x - \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

- (2) 꼭짓점의 좌표 :  $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right)$



(3) 축의 방정식 :  $x = -\frac{b}{2a}$

(4)  $y$ 축과의 교점의 좌표 :  $(0, c)$

(5)  $y = ax^2 + bx + c$ 를  $y = a(x-p)^2 + q$ 의 꼴로 고치기

$$y = ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c$$

$$= a\left\{x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right\} + c$$

$$= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

(예)  $y = 2x^2 - 12x + 5$

$$= 2(x^2 - 6x) + 5$$

$$= 2(x^2 - 6x + 9 - 9) + 5$$

$$= 2(x-3)^2 + 5 - 18$$

$$= 2(x-3)^2 - 13$$

2. 이차함수  $y = ax^2 + bx + c$ 의 그래프에서  $x$ 축,  $y$ 축과의 교점

(1)  $x$ 축과의 교점

① 교점이 2개 일 때 :  $x$ 축과 두 점에서 만날 때  $\Rightarrow$

$$b^2 - 4ac > 0$$

② 교점이 1개 일 때 :  $x$ 축과 한 점에서 만날 때(접할 때)  $\Rightarrow b^2 - 4ac = 0$

③ 교점이 없을 때 :  $x$ 축과 만나지 않을 때  $\Rightarrow$

$$b^2 - 4ac < 0$$

(2)  $y$ 축과의 교점 : 항상 존재  $\Rightarrow (0, c)$

3. 이차함수의 그래프에서  $x$ 절편,  $y$ 절편

이차함수  $y = ax^2 + bx + c$ 의 그래프에서의  $x$ 절편과  $y$ 절편

(1)  $x$ 절편

① 그래프가  $x$ 축과 만나는 점의  $x$ 좌표

②  $y=0$ 일 때의  $x$ 의 값

③  $ax^2 + bx + c = 0$ 의 근(해)

(2)  $y$ 절편

① 그래프가  $y$ 축과 만나는 점의  $y$ 좌표

②  $x=0$ 일 때의  $y$ 값

③ 상수항  $c$

(예) 이차함수  $y = x^2 - 5x - 6$ 의 그래프에서  $x$ 절편과  $y$ 절편

$x$ 절편 :  $x^2 - 5x - 6 = 0$ 에서  $(x+1)(x-6) = 0$  이므로

$x = -1$  또는  $x = 6$  즉,  $x$ 절편은  $-1$ 과  $6$ 이다.

$y$ 절편 :  $y = 0^2 - 5 \times 0 - 6 = -6$  즉,  $y$ 절편은  $-6$ 이다.

4. 이차함수  $y = ax^2 + bx + c$ 의 그래프에서  $a$   $b$   $c$ 의 부호

(1)  $a$ 의 부호 : 그래프의 모양에 따라 결정된다.

① 아래로 볼록 :  $a > 0$

② 위로 볼록 :  $a < 0$

(2)  $b$ 의 부호 : 축의 위치에 따라 결정된다.

① 축이  $y$ 축의 왼쪽에 있을 때 :  $a$   $b$ 는 같은 부호 ( $ab > 0$ )

② 축이  $y$ 축의 오른쪽에 있을 때 :  $a$   $b$ 는 다른 부호 ( $ab < 0$ )

③ 축이  $y$ 축 :  $b = 0$

(3)  $c$ 의 부호 :  $y$ 절편( $c$ )의 위치에 따라 결정된다.

①  $y$ 절편이 원점의 위쪽에 있을 때 :  $c > 0$

②  $y$ 절편이 원점의 아래쪽에 있을 때 :  $c < 0$

③  $y$ 절편이 원점일 때 :  $c = 0$

1. 다음 <보기> 중에서  $y$ 가  $x$ 에 대한 이차함수인 것만 모두 골라라.

| <보기>             |                         |                          |
|------------------|-------------------------|--------------------------|
| (㉠) $y=4x+5$     | (㉡) $y=-10$             | (㉢) $y=3x^2-x+4$         |
| (㉣) $x^2-6x+1=0$ | (㉤) $y=\frac{x^2-1}{2}$ | (㉥) $y=\frac{1}{2x^2}+1$ |

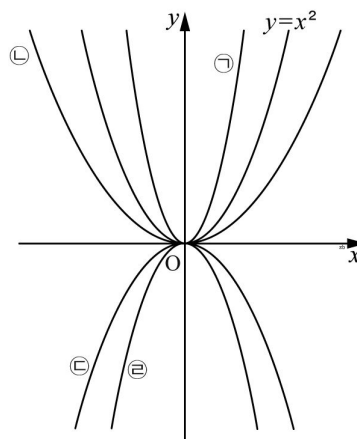
2. 정의역이  $\{0,1,2\}$  인 이차함수  $f(x)=-x^2+x-2$ 의 치역을 구하여라.

3. 이차함수  $y=f(x)$ 에서  $f(x)=2x^2+x-3$  일 때,  $f(2)$ 의 값을 구하여라.

4. 이차함수  $y=2x^2$ 과  $y=\frac{1}{2}x^2$ 에 대하여 다음 대응 표를 완성하여라.

| $x$                | ... | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | ... |
|--------------------|-----|----|----|---|---|---|-----|
| $y=2x^2$           | ... |    |    |   |   |   | ... |
| $y=\frac{1}{2}x^2$ | ... |    |    |   |   |   | ... |

5. 다음 그림은 다음 이차함수의 그래프이다. 이차함수의 그래프와 함수의 식을 알맞게 연결하여라.



(1)  $y=2x^2$       (2)  $y=\frac{1}{3}x^2$       (3)  $y=-x^2$       (4)  $y=-\frac{2}{3}x^2$

[정답] 1. (㉢), (㉤)      2.  $\{-4, -2\}$       3. 7

| $x$                | ... | -2 | -1            | 0 | 1             | 2 | ... |
|--------------------|-----|----|---------------|---|---------------|---|-----|
| $y=2x^2$           | ... | 8  | 2             | 0 | 2             | 8 | ... |
| $y=\frac{1}{2}x^2$ | ... | 2  | $\frac{1}{2}$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | 2 | ... |

4. (1) ㉠ (2) ㉡ (3) ㉢ (4) ㉣

6. 다음 이차함수의 그래프를  $y$ 축의 방향으로 [ ] 안의 수만큼 평행이동한 그래프의 식을 구하고, 축의 방정식과 꼭짓점의 좌표를 차례로 구하여라.

(1)  $y=-x^2$  [2] (2)  $y=\frac{3}{2}x^2$  [-1]

7. 다음 이차함수의 그래프를  $x$ 축의 방향으로 [ ] 안의 수만큼 평행이동한 그래프의 식을 구하고, 축의 방정식과 꼭짓점의 좌표를 차례로 구하여라.

(1)  $y=3x^2$  [-4] (2)  $y=-\frac{1}{2}x^2$  [3]

8. 다음 이차함수의 그래프를 [ ] 안의 수만큼 차례로  $x$ 축,  $y$ 축의 방향으로 평행이동한 그래프의 식을 구하고, 축의 방정식과 꼭짓점의 좌표를 차례로 구하여라.

(1)  $y=2x^2$  [1,2] (2)  $y=-x^2$  [-2,-4] (3)  $y=-\frac{2}{3}x^2$  [-3,2]

9. 다음 물음에 답하여라.

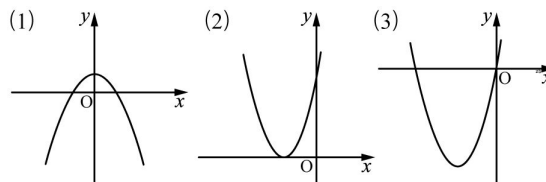
(1) 이차함수  $y=-x^2$ 의 그래프를  $y$ 축의 방향으로 3만큼 평행이동 하면 점  $(k,-1)$ 를 지난다고 할 때, 상수  $k$ 의 값

(2) 이차함수  $y=3x^2$ 의 그래프를  $x$ 축,  $y$ 축의 방향으로 각각 2, -3만큼 평행이동하면 점  $(1,k)$ 를 지난다고 할 때, 상수  $k$ 의 값

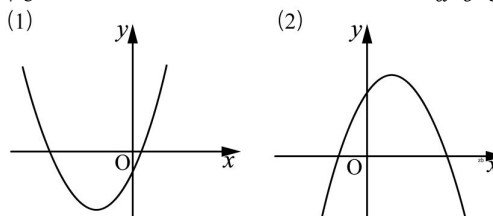
(3) 이차함수  $y=-\frac{2}{5}x^2$ 의 그래프를  $x$ 축,  $y$ 축의 방향으로 각각 1,  $a$ 만큼 평행이동 하면 점  $(-4,-7)$ 을 지난다고 할 때, 상수  $a$ 의 값

(4) 이차함수  $y=ax^2$ 의 그래프를  $x$ 축,  $y$ 축의 방향으로 각각 -4, 3만큼 평행이동하면 점  $(-2,9)$ 를 지난다고 할 때, 상수  $a$ 의 값

10. 다음 이차함수  $y=a(x-p)^2+q$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때,  $a$ ,  $p$ ,  $q$ 의 부호를 각각 말하여라.



11. 이차함수  $y=ax^2+bx+c$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때,  $a$ ,  $b$ ,  $c$ 의 부호를 각각 말하여라.



[정답] 6. (1)  $y=-x^2+2$ ,  $x=0$ ,  $(0,2)$  (2)  $y=\frac{3}{2}x^2-1$ ,  $x=0$ ,  $(0,-1)$

7. (1)  $y=3(x+4)^2$ ,  $x=-4$ ,  $(-4,0)$  (2)  $y=-\frac{1}{2}(x-3)^2$ ,  $x=3$ ,  $(3,0)$

8. (1)  $y=2(x-1)^2+2$ ,  $x=1$ ,  $(1,2)$  (2)  $y=-(x+2)^2-4$ ,  $x=-2$ ,  $(-2,-4)$

(3)  $y=-\frac{2}{3}(x+3)^2+2$ ,  $x=-3$ ,  $(-3,2)$  9. (1)  $\pm 2$  (2) 0 (3) 3 (4)  $\frac{3}{2}$

10. (1)  $a < 0$ ,  $p = 0$ ,  $q > 0$  (2)  $a > 0$ ,  $p < 0$ ,  $q = 0$  (3)  $a > 0$ ,  $p < 0$ ,  $q < 0$

11. (1)  $a > 0$ ,  $b > 0$ ,  $c < 0$  (2)  $a < 0$ ,  $b > 0$ ,  $c > 0$