

미적분 2 개념 및 공식

1. 지수함수의 정의

$a > 0$ 이고 $a \neq 1$ 일 때, 함수 $y = a^x$ 을 a 를 밑으로 하는 x 의 지수함수라 한다.

2. 지수함수 $y = a^x$ 의 성질

- (1) 정의구역은 실수 전체의 집합 R
- (2) 치역은 양의 실수 전체의 집합
- (3) $a > 1$ 일 때, x 의 값이 증가하면 y 의 값도 증가한다.

즉, $x_1 < x_2$ 이면 $a^{x_1} < a^{x_2}$ 이다.

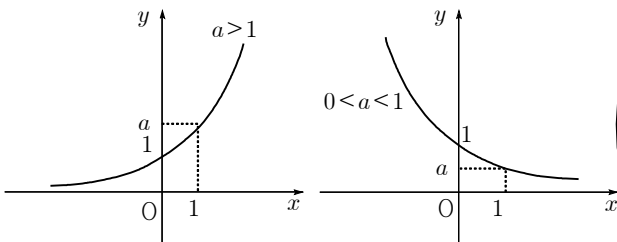
$0 < a < 1$ 이면 x 의 값이 증가하면, y 의 값은 감소한다.

즉, $x_1 < x_2$ 이면 $a^{x_1} > a^{x_2}$ 이다.

- (4) 그래프는 점 $(0, 1)$, $(1, a)$ 를 지난다.

- (5) 점근선은 x 축($y=0$)

- (6) $y = a^x$ 의 그래프와 $y = \left(\frac{1}{a}\right)^x$ 의 그래프는 y 축에 대하여 대칭이다.



지수함수 $y = a^x$ ($a > 0$, $a \neq 1$)의 그래프를

- ① x 축에 대하여 대칭이동 $\Rightarrow y = -a^x$
- ② y 축에 대하여 대칭이동 $\Rightarrow y = a^{-x} = \left(\frac{1}{a}\right)^x$
- ③ 원점에 대하여 대칭이동 $\Rightarrow y = -a^{-x} = -\left(\frac{1}{a}\right)^x$

- (7) 지수함수 $y = a^x$ ($a > 0$, $a \neq 1$)의 그래프를 x 축의 방향으로 m 만큼, y 축의 방향으로 n 만큼 평행이동하면 $y = a^{x-m} + n$ 이다.

절대값이 있는 그래프

- (1) $y = f(|x|)$

i) $x \geq 0$ 일 때, $y = f(x)$

ii) $x < 0$ 일 때, $y = f(-x)$

두 그래프는 y 축에 대하여 대칭이다.

- (2) $|y| = f(x)$

i) $y \geq 0$ 일 때, $y = f(x)$

ii) $y < 0$ 일 때, $-y = f(x)$

두 그래프는 x 축에 대하여 대칭이다.

- (3) $y = |f(x)|$

i) $f(x) \geq 0$ 일 때, $y = f(x)$

ii) $f(x) < 0$ 일 때, $y = -f(x)$

함수값이 음수인 경우는 없다.

$y = f(x)$ 의 그래프를 그린후 x 축 아래 있는 부분을 모두 꺾어 올린다.

3. 지수함수의 대소관계

$$a > 1 \text{ 이면 } x < y \iff a^x < a^y$$

$$0 < a < 1 \text{ 이면 } x < y \iff a^x > a^y$$

4. 지수함수의 최대·최소 구하기

(1) $y = a^x$ 의 꼴

그래프를 그리고 주어진 변역에서 최댓값·최솟값을 구한다.

* $a > 1$ 이면 증가함수이므로 $\alpha \leq x \leq \beta$ 일 때, $f(\alpha)$ 는 최소, $f(\beta)$ 는 최대가 된다.

* $0 < a < 1$ 이면 감소함수이므로 $\alpha \leq x \leq \beta$ 일 때, $f(\alpha)$ 는 최대, $f(\beta)$ 는 최소가 된다.

(2) 산술평균과 기하평균의 관계 이용

(3) 치환꼴 $\Rightarrow$ 치환하면 변역이 생긴다!!!!

$a^x = X$ 로 치환하여 X 의 이차함수로 변형한 다음, 주어진 변역에서 최댓값·최솟값을 구한다.

이 때 반드시 $X > 0$ 이어야 한다.

5. 지수방정식

지수에 미지수를 포함한 방정식을 지수방정식이라고 한다.

6. 지수방정식의 해법

(1) 밑이 같을 때 $\Rightarrow a^{f(x)} = a^{g(x)}$ 꼴 $\iff f(x) = g(x)$ (단, $a \neq 1, a > 0$)

(2) 밑이 다를 때 $\Rightarrow a^{f(x)} = b^{g(x)}$ 의 양변에 로그를 취한다.

(3) a^x 을 포함할 때 $\Rightarrow a^x = X$ 로 치환한다. (단, $a^x = X > 0$)

7. 지수부등식

지수에 미지수를 포함한 부등식을 지수부등식이라고 한다.
지수부등식의 해법은 지수방정식의 해법과 같으나,
밑과 지수의 대소관계에 유의한다

8. 지수부등식의 해법

(1) 항이 두 개인 경우 : 밑이 같을 때와 다를 때가 있다.

① 밑이 같을 때 : $a^{f(x)} < a^{g(x)}$ 의 해법

$$a > 1 \text{ 일 때 } f(x) < g(x)$$

$$0 < a < 1 \text{ 일 때 } f(x) > g(x)$$

② 밑이 다를 때 : $a^{f(x)} < b^{g(x)}$ 의 해법

양변에 로그를 취하여 $f(x)\log a < g(x)\log b$ 로 만든 후 푼다.

(2) 항이 세 개인 경우 : $a^{f(x)} = t$ 로 치환하여 t 에 대한 부등식을 만들어 푼 다음,

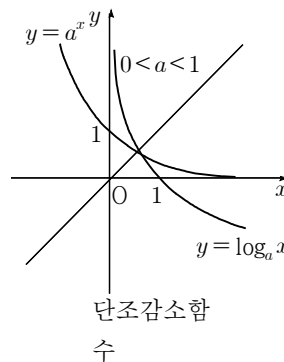
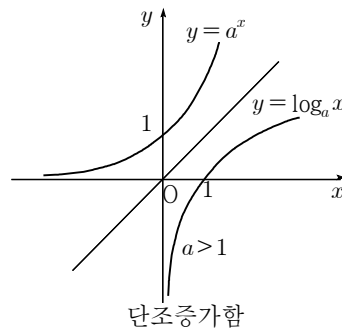
위의 ①, ②의 해법을 적용하여 x 의 범위를 구한다.

9. 로그함수의 정의

지수함수 $y = a^x$ ($a > 0, a \neq 1$)는 로그의 정의에 의하여 $x = \log_a y$ 로 나타낼 수 있고
여기서 x 와 y 를 바꾸면 $y = a^x$ 의 역함수 $y = \log_a x$ ($a > 0, a \neq 1$)를 얻는다.
이 함수 $y = \log_a x$ ($a > 0, a \neq 1$)를 a 를 밑으로 하는 로그함수라 한다.

10. 로그함수 $y = \log_a x$ ($a > 0, a \neq 1$)의 성질

- (1) 정의구역은 양의 실수 전체의 집합
- (2) 치역은 실수 전체의 집합 R
- (3) $a > 1$ 일 때, x 의 값이 증가하면 y 값도 증가한다.
즉, $x_1 < x_2$ 이면 $\log_a x_1 < \log_a x_2$ 이다.
 $0 < a < 1$ 일 때, x 의 값이 증가하면 y 값은 감소한다.
즉, $x_1 < x_2$ 이면 $\log_a x_1 > \log_a x_2$ 이다.
- (4) 그래프는 점 $(1, 0)$, $(a, 1)$ 을 지나고, 점근선은 y 축이다.



- (5) $y = a^x$ 과 직선 $y = x$ 에 대해 대칭(역함수)
- (6) 로그함수 $y = \log_a x$ ($a > 0, a \neq 1$)의 그래프를 x 축의 방향으로 m 만큼,
 y 축의 방향으로 n 만큼 평행이동하면 $y = \log_a(x - m) + n$ 이다.
- (7) 로그함수 $y = \log_a x$ ($a > 0, a \neq 1$)의 그래프를
 - ① x 축에 대하여 대칭이동 $\Rightarrow y = -\log_a x = \log_{\frac{1}{a}} x$
 - ② y 축에 대하여 대칭이동 $\Rightarrow y = \log_a(-x)$
 - ③ 원점에 대하여 대칭이동 $\Rightarrow y = -\log_a(-x)$

11. 진수와 로그의 대소관계

$x > 0, y > 0, a > 0, a \neq 1$ 에 대하여

$$(1) x = y \iff \log_a x = \log_a y$$

$$(2) a > 1 \text{ 일 때 } x < y \iff \log_a x < \log_a y$$

$$(3) 0 < a < 1 \text{ 일 때 } x < y \iff \log_a x > \log_a y$$

12. 로그함수의 최대 · 최소 구하기

$$(1) y = \log_a f(x) \text{ 풀}$$

$a > 1$ 일 때, 증가함수, $0 < a < 1$ 일 때 감소함수

$$\textcircled{1} a > 1 \text{ 인 경우 : } \begin{cases} f(x) \text{가 최대일 때} \Rightarrow y \text{가 최대} \\ f(x) \text{가 최소일 때} \Rightarrow y \text{가 최소} \end{cases}$$

$$\textcircled{2} 0 < a < 1 \text{ 인 경우 : } \begin{cases} f(x) \text{가 최소일 때} \Rightarrow y \text{가 최대} \\ f(x) \text{가 최대일 때} \Rightarrow y \text{가 최소} \end{cases}$$

(2) 산술평균, 기하평균의 관계 이용

(3) 치환꼴 $\Rightarrow$ 치환하면 번역!!!!!!

$\log_a x = X$ 로 치환하여 X 의 이차함수로 변형한 다음, 주어진 번역에서 최댓값 · 최솟값을 구한다.

13. 로그방정식

로그의 진수 또는 밑에 미지수를 포함한 방정식을 로그방정식이라고 한다.

14. 로그방정식의 해법

$$(1) \log_a f(x) = b \text{ 풀} \Rightarrow f(x) = a^b$$

$$(2) \text{ 밑이 같을 때 : } \log_a f(x) = \log_a g(x) \Rightarrow f(x) = g(x)$$

$$(a \neq 1, a > 0 \text{ 이고 } f(x) > 0, g(x) > 0)$$

$$(3) \log_a x \text{를 포함할 때} \Rightarrow \log_a x = X \text{로 치환한다.}$$

$$(4) \text{ 지수에 로그가 있을 때} \Rightarrow \text{양변에 로그를 취한다.}$$

*로그방정식과 부등식을 풀 때에는 반드시 로그조건을 생각하여야 한다.

로그조건 $\Rightarrow$ 밑은 1이 아닌 양수, 진수는 양수

15. 로그부등식

진수 또는 밑에 미지수를 포함한 부등식을 로그부등식이라고 한다.

로그부등식의 해법은 로그방정식의 해법과 같으나, 밑과 진수의 대소 관계에 유의한다.

16. 로그부등식의 해법

(1) 로그에 대하여 일차식인 경우의 해법

$$\log_a f(x) < \log_a g(x)$$

진수 : $f(x) > 0, g(x) > 0$, 밑 : $a > 0, a \neq 1$ ㉠

이 때 구하는 범위는

① $a > 1$ 일 때 $f(x) < g(x)$ 와 ㉠의 공통범위가 구하는 범위이다.

② $0 < a < 1$ 일 때 $f(x) > g(x)$ 와 ㉠의 공통범위가 구하는 범위이다.

(2) 로그에 대하여 일차식이 아닌 경우의 해법

$\log_a f(x) = t$ 로 치환하여 t 에 관한 부등식을 만들어 푼 다음, 위의 ①, ②의 해법을 적용하여 x 의 범위를 구한다.

(3) 지수에 로그가 있을 때

양변에 로그를 취한다.

* 로그부등식도 로그방정식과 같이 **로그조건**을 꼭 음미하여야 한다.(밑수조심!!! 진수조건조심!!!!)

17. 지수함수의 극한

지수함수 $y = a^x$ 에서

(1) $a > 1$ 일 때, $\lim_{x \rightarrow \infty} a^x = \infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$

(2) $0 < a < 1$ 일 때, $\lim_{x \rightarrow \infty} a^x = 0$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = \infty$

18. 로그함수의 극한

로그함수 $y = \log_a x$ 에서

(1) $a > 1$ 일 때, $\lim_{x \rightarrow \infty} \log_a x = \infty$, $\lim_{x \rightarrow +0} \log_a x = -\infty$

(2) $0 < a < 1$ 일 때, $\lim_{x \rightarrow \infty} \log_a x = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +0} \log_a x = \infty$

19. 지수함수의 극한

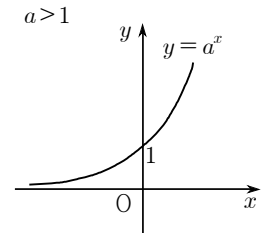
a 가 1이 아닌 양의 상수일 때, 지수함수 $y = a^x$ 은 실수 전체의 집합을 정의역으로 하는 함수이다.

(1) $a > 1$ 일 때

$y = a^x$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

이 때 $x \rightarrow \infty$ 이면 $a^x \rightarrow \infty$ 이고

$x \rightarrow -\infty$ 이면 $a^x \rightarrow 0$ 이다.

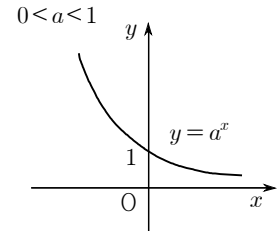


(2) $0 < a < 1$ 일 때

$y = a^x$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

이 때 $x \rightarrow \infty$ 이면 $a^x \rightarrow 0$ 이고 $x \rightarrow -\infty$ 이면 $a^x \rightarrow \infty$ 이다.

또, $x \rightarrow b$ 이면 $a^x \rightarrow a^b$ 이다.

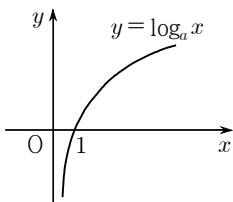


20. 로그함수의 극한

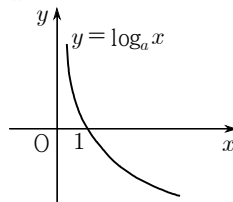
로그함수 $y = \log_a x$ ($a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$)의 정의역은 양수 전체의 집합이고

그래프를 $a > 1$ 인 경우와 $0 < a < 1$ 인 경우로 나누어 생각하면 아래 그림과 같으므로 다음을 알 수 있다.

$a > 1$



$0 < a < 1$



21. e 의 정의

함수 $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ 에 대하여 x 가 0에 한없이 가까워질 때의 극한값은 x 에 $\pm 0.1, \pm 0.01, \pm 0.001, \pm 0.0001, \pm 0.00001, \dots$

을 차례로 대입하여 $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ 의 값을 계산해 보면 오른쪽 표와 같다.

이 표에서 x 가 0에 한없이 가까워짐에 따라 $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ 의 값이 어떤 일정한 수에 수렴하고 있음을 알 수 있다.

실제로 $x \rightarrow 0$ 일 때, $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ 의 극한값이 존재한다는 것이 알려져 있으며, 이 극한값을 e 로 나타내고 자연 상수라 부른다.

이 때, e 는 무리수이고 이를 소수로 나타내면

$$e = 2.71828182845 \dots$$

와 같이 순환하지 않는 무한소수임이 알려져 있다.

22. 자연로그

무리수 e 를 밑으로 하는 $\log_e x$ 를 x 의 자연로그라고 한다.

자연로그 $\log_e x$ 는 밑 e 를 생략하고 간단히 $\log x$ 로 나타낸다.

다만 상용로그와 구별하기 위하여 상용로그의 밑을 밝혀 $\log_{10} x$ 로

나타내거나 자연로그 $\log_e x$ 를 $\log x$ 대신 $\ln x$ 로 나타내기로 한다.

자연로그의 성질($x > 0, y > 0$ 일 때)

$$\textcircled{1} \ln 1 = 0, \ln e = 1 \quad \textcircled{2} \ln xy = \ln x + \ln y$$

$$\textcircled{3} \ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y \quad \textcircled{4} \ln x^n = n \ln x \text{ (단, } n \text{은 임의의 실수)}$$

x	$(1+x)^{\frac{1}{x}}$
-0.1	2.86797...
-0.01	2.73199...
-0.001	2.71964...
-0.0001	2.71841...
-0.00001	2.71829...
$\vdots$	$\vdots$
0	2.71828...
$\vdots$	$\vdots$
0.00001	2.59374...
0.0001	2.70481...
0.001	2.71692...
0.01	2.71814...
0.1	2.71827...

23. 지수 로그함수의 극한

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{kx} - 1}{x} = k$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a \quad (a > 0, a \neq 1)$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

$$(7) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+kx)}{x} = k$$

$$(8) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e = \frac{1}{\ln a}$$

$$(9) \lim_{x \rightarrow \infty} x \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) = 1$$

4. 지수함수와 로그함수의 극한의 증명

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e \text{ 에서 } \frac{1}{x} = t \text{ 라 하면}$$

$$x = \frac{1}{t} \text{ 이고 } x \rightarrow 0 \text{ 일 때 } t \rightarrow \infty$$

$$\therefore \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t = e \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

$$(3) e^x - 1 = z \text{ 로 놓으면 } e^x = 1+z \text{ 이므로 } x = \ln(1+z)$$

$$x \rightarrow 0 \text{ 일 때, } z \rightarrow 0 \text{ 이므로 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{\ln(1+z)} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{1}{z} \ln(1+z)}$$

$$\text{그런데 } \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{z} \ln(1+z) = \lim_{z \rightarrow 0} \ln(1+z)^{\frac{1}{z}} = \ln e = 1$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$(4) e^{kx} - 1 = z \text{ 로 놓으면 } e^{kx} = 1+z \text{ 이므로 } x = \frac{\ln(1+z)}{k}$$

$$\text{또 } x \rightarrow 0 \text{ 일 때, } z \rightarrow 0 \text{ 이므로 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{kx} - 1}{x} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{k}{\frac{\ln(1+z)}{z}} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{k}{\frac{1}{z} \ln(1+z)}$$

$$\text{그런데 } \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{z} \ln(1+z) = \lim_{z \rightarrow 0} \ln(1+z)^{\frac{1}{z}} = \ln e = 1$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{kx} - 1}{x} = k$$

$$(5) a^x - 1 = t \text{ 로 놓으면 } x = \log_a(1+t), \text{ 또 } x \rightarrow 0 \text{ 일 때, } t \rightarrow 0 \text{ 이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\log_a(1+t)} = \frac{1}{\log_a \left\{ \lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{\frac{1}{t}} \right\}}$$

$$= \frac{1}{\log_a e} = \log_e a = \ln a$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln(1+x) = \ln \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln e = 1$$

$$(7) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+kx)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln(1+kx) = \ln \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ (1+kx)^{\frac{1}{kx}} \right\}^k = \ln e^k = k$$

$$(8) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \log_a(1+x)^{\frac{1}{x}} = \log_a \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \log_a e = \frac{1}{\ln a}$$

$$(9) \lim_{x \rightarrow \infty} x \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) = \ln \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \ln e = 1$$

24. 지수함수의 미분법

$$(1) y = a^x \rightarrow y' = a^x (\ln a) \quad (\text{단, } a \neq 1, a > 0)$$

$$(2) y = e^x \rightarrow y' = e^x$$

$$(3) y = a^{f(x)} \rightarrow y' = a^{f(x)} (\ln a) f'(x)$$

$$(4) y = e^{f(x)} \rightarrow y' = e^{f(x)} f'(x)$$

(해설)

$$(i) y = a^x \text{ 일 때, } y' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} a^x \cdot \frac{a^h - 1}{h} = a^x \ln a \quad \dots\dots\dots (2)$$

여기서 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^h - 1}{h} = \ln a$ 임을 밝혀 보자.

$a^h - 1 = t$ 로 놓으면, $a^h = 1 + t$ 이므로 $h = \log_a(1 + t)$ 이고

$h \rightarrow 0$ 일 때, $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^h - 1}{h} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\log_a(1 + t)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{1}{t} \log_a(1 + t)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\log_a(1 + t)^{\frac{1}{t}}} = \frac{1}{\log_a e} = \ln a$$

특히, $a = e$ 로 놓으면, $y = e^x$ 일 때, $y' = e^x \quad \dots\dots\dots (1)$

(ii) 합성함수의 미분법에 의하여 $y = a^{f(x)}$ 의 도함수는 $y = a^u$, $u = f(x)$ 로 놓으면

$$\frac{dy}{du} = a^u \ln a, \quad \frac{du}{dx} = f'(x) \text{ 이므로}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = a^u \ln a \cdot f'(x) = a^{f(x)} \cdot \ln a \cdot f'(x) \quad \dots\dots\dots (4)$$

특히, $a = e$ 로 놓으면, $y = e^{f(x)}$ 일 때, $y' = e^{f(x)} \cdot f'(x) \quad \dots\dots\dots (1)$

25. 로그함수의 미분법

$$(1) y = \ln x \rightarrow y' = \frac{1}{x}$$

$$(2) y = \log_a x \rightarrow y' = \frac{1}{x \ln a}$$

$$(3) y = \ln |f(x)| \rightarrow y' = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

$$(4) y = \log_a |f(x)| \rightarrow y' = \frac{f'(x)}{\ln a f(x)}$$

(해설)

(i) $y = \log_a x$ 일 때,

$$\begin{aligned} y' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log_a(x+h) - \log_a x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \log_a \frac{x+h}{x} = \lim_{h \rightarrow 0} \log_a \left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}} = \lim_{h \rightarrow 0} \log_a \left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h} \cdot \frac{1}{x}} = \log_a e^{\frac{1}{x}} \\ &= \frac{1}{x} \log_a e = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\ln a} \quad \dots\dots\dots (2) \end{aligned}$$

특히, $a = e$ 로 놓으면, $y = \ln x$ 일 때, $y' = \frac{1}{x} \quad \dots\dots\dots (1)$

(ii) $y = \log_a |f(x)|$ 에서 $u = f(x)$ 로 놓으면 $y = \log_a |u|$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{u \ln a} \cdot f'(x) = \frac{f'(x)}{\ln a f(x)} \quad \dots\dots\dots (4)$$

특히, $a = e$ 이면 $\ln e = 1$ 이므로 $y = \ln |f(x)|$ 의 도함수는 $y' = \frac{f'(x)}{f(x)} \quad \dots\dots\dots (3)$

※ 로그미분법

도함수를 구하는 한 방법으로서 양변의 절대값에 자연로그를 취한 다음 양변을 미분하여
도함수를 구하는 미분법을 로그미분법이라고 하며, 지수가 복잡하거나 형태가 복잡한 함수의 도함수를
구할 때는 로그미분법을 이용하는 것이 편리하다.

(1) 문제 유형

- ① 밑, 지수가 변수일 때 } 로그미분법을 이용한다.
② 복잡한 분수꼴일 때

(2) 문제 푸는 방법

- ① 주어진 식의 양변의 절대값에 자연로그를 취한다.
② 양변을 x 에 대하여 미분한다.

이 때, $y = \ln|x| \rightarrow y' = \frac{1}{x}$ 이 이용된다.

양변이 양이면 절대값을 취하지 않고 직접 로그를 취한다.

(해설)

$y = x^x$ 의 미분법

함수 $y = x^x$ 의 양변에 절대값을 취하면 $|y| = |x^x|$

이 식의 양변에 자연로그를 취하면 $\ln|y| = x \ln|x|$

양변을 x 에 대하여 미분하면 $\frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = \ln x + x \cdot \frac{1}{x}$ 에서 $\frac{dy}{dx} = y(\ln x + 1)$

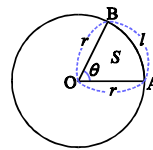
$$\therefore \frac{dy}{dx} = y' x^x (\ln x + 1)$$

26. 일반각

시초선 OX로부터 원점 O를 중심으로 α° 만큼 회전 이동한 위치에
동경 OP가 있을 때, $\angle XOP$ 의 크기를 나타내는 각들을
 $360^\circ \times n + \alpha^\circ$ (n 은 정수)
로 나타내고 OP의 일반각이라 한다.

27. 라디안(rad)

반지름과 같은 길이의 호에 대한 중심각의
크기를 1라디안이라 한다.



28. 호도법과 육십분법

$$1 \text{ 라디안} = \frac{180^\circ}{\pi}, \quad 1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ 라디안}$$

29. 부채꼴의 호의 길이와 넓이

반지름의 길이가 r 인 원에서 중심각이 θ 인
부채꼴의 호의 길이를 l , 넓이를 S 라고 하면

$$1) \text{ 부채꼴의 호의 길이 : } l = r\theta$$

$$2) \text{ 부채꼴의 넓이 : } S = \frac{1}{2}r^2\theta = \frac{1}{2}rl$$

30. 삼각함수의 정의

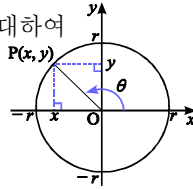
오른쪽의 그림에서 임의의 실수 θ (라디안)에 대하여

$$\sin \theta = \frac{y}{r}, \csc \theta = \frac{r}{y}$$

$$\cos \theta = \frac{x}{r}, \sec \theta = \frac{r}{x}$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x}, \cot \theta = \frac{x}{y}$$

로 정의한다.

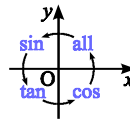
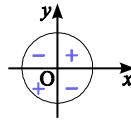
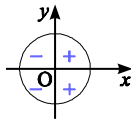
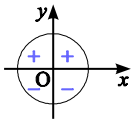


특수각의 삼각비

A 삼각비	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin A$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos A$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan A$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	없음 (∞)

31. 삼각함수 값의 부호 :

$\sin \theta > 0$	$\cos \theta > 0$	$\tan \theta > 0$	함수값이 양인 것
-------------------	-------------------	-------------------	-----------



32. 삼각함수의 상호관계 :

$$(1) \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

$$(2) \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1, 1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

33. 삼각함수의 성질 : n 이 정수일 때

(1) 주기 공식

$$\sin(2n\pi + \theta) = \sin \theta, \cos(2n\pi + \theta) = \cos \theta, \tan(n\pi + \theta) = \tan \theta$$

(2) 음각 공식

$$\sin(-\theta) = -\sin \theta, \cos(-\theta) = \cos \theta, \tan(-\theta) = -\tan \theta$$

(3) 보각 공식

$$\sin(\pi - \theta) = \sin \theta, \cos(\pi - \theta) = -\cos \theta, \tan(\pi - \theta) = -\tan \theta$$

(4) 여각 공식

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos \theta, \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin \theta, \tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{1}{\tan \theta}$$

34. $90^\circ n \pm \theta$ 공식 : n 이 정수일 때, 삼각함수 $\left(\frac{n\pi}{2} \pm \theta\right) = \pm$ 삼각함수 θ

(1) n 이 짝수이면 삼각함수는 그대로이고

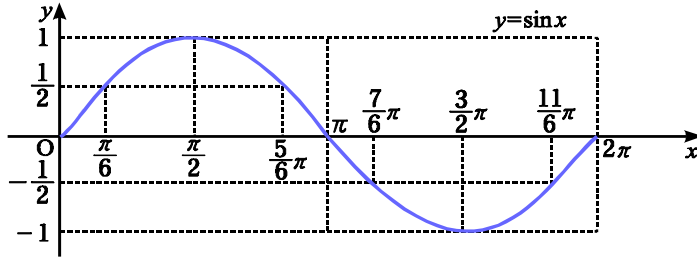
(2) n 이 홀수이면 $\sin \Leftrightarrow \cos, \cos \Leftrightarrow \sin, \tan \Leftrightarrow \frac{1}{\tan}$ 로 바뀐다.

(3) 부호는 사분면의 위치에 따라정한다.

35. 함수의 주기

함수 f 의 정의역에 속하는 모든 x 에 대하여
 $f(x+p)=f(x)$ 를 만족하는 최소의 양수 p 를 주기라 한다.

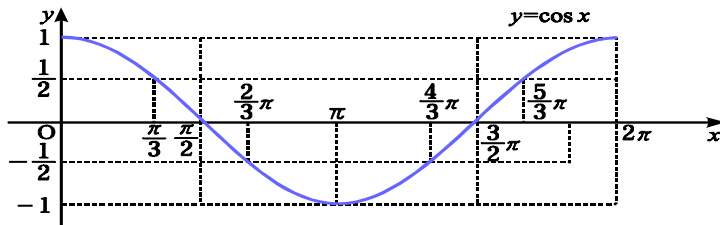
36. $y = \sin x$ 의 그래프



37. $y = \sin x$ 의 성질

- | | |
|----------------------------------|--|
| (1) 정의역 : 모든 실수 | (2) 치역 : $\{y \mid -1 \leq y \leq 1\}$ |
| (3) 주기 : 2π ($=360^\circ$) | (4) 대칭성 : 원점에 대하여 대칭 (기함수) |

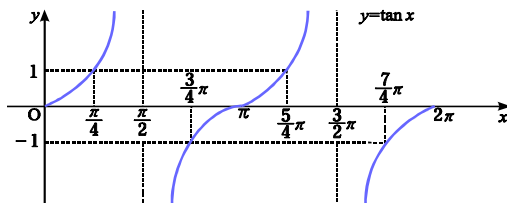
38. $y = \cos x$ 의 그래프



39. $y = \cos x$ 의 성질

- | | |
|----------------------------------|--|
| (1) 정의역 : 모든 실수 | (2) 치역 : $\{y \mid -1 \leq y \leq 1\}$ |
| (3) 주기 : 2π ($=360^\circ$) | (4) 대칭성 : y 축에 대하여 대칭 (우함수) |

40. $y = \tan x$ 의 그래프



41. $y = \tan x$ 의 성질

- | | |
|---|----------------------------|
| (1) 정의역 : $x \neq 2n\pi + \frac{\pi}{2}$ 인 정수 | (2) 치역 : y 는 모든 실수 |
| (3) 주기 : π ($=180^\circ$) | (4) 대칭성 : 원점에 대하여 대칭 (기함수) |

42. 삼각방정식 $\sin x = a$ 의 해법 :

- (1) a 값의 양, 음에 관계없이 $\sin \theta = a$ 가 되는 θ 를 찾는다.
- (2) a 가 양인 경우 : 1, 2사분면,
 a 가 음인 경우 : 3, 4사분면 θ 를 찾는다.
- (3) 1사분면 $\theta : \theta$, 2사분면 $\theta : \pi - \theta$,
3사분면 $\theta : \pi + \theta$ 4사분면 $\theta : 2\pi - \theta$

43. $\cos x = a$, $\tan x = a$ 의 해 : $\sin x = a$ 의 해와 마찬가지로 방법으로 θ 를 찾은 다음

- (1) $\cos x = a$ 의 해 :
 a 가 양인 경우 1, 4사분면, a 가 음인 경우 : 2, 3사분면 θ 를 찾는다.
- (2) $\tan x = a$ 의 해 :
 a 가 양인 경우 1, 3사분면, a 가 음인 경우 : 2, 4사분면 θ 를 찾는다.

44. 삼각부등식의 해법 : 먼저 부등호를 등호로 바꾼 방정식을 푼 후에 그래프를 이용하여

그 부등식을 만족시키는 영역을 구한다.

45. 삼각함수의 덧셈정리

$$(1) \quad \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

$$(2) \quad \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

$$(3) \quad \tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$$

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}$$

(1) 좌표평면 위에서 각의 크기 α, β 가 나타내는 동경과 단위원이 만나는 점을 각각 P, Q라 하면,

P($\cos \alpha, \sin \alpha$), Q($\cos \beta, \sin \beta$)이므로, 두 점 P, Q 사이의 거리에서

$$\overline{PQ}^2 = (\cos \alpha - \cos \beta)^2 + (\sin \alpha - \sin \beta)^2 \quad \dots\dots\dots ①$$

또, $\triangle POQ$ 에서 코사인제이법칙을 이용하면,

$$\overline{PQ}^2 = \overline{OP}^2 + \overline{OQ}^2 - 2\overline{OP} \cdot \overline{OQ} \cos \angle POQ$$

이 때, $\overline{OP} = \overline{OQ} = 1$, $\angle POQ = \alpha - \beta$ 이므로,

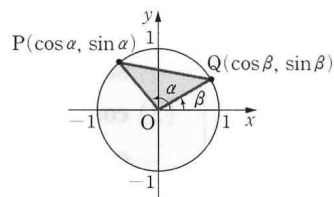
$$\overline{PQ}^2 = 1 + 1 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cos(\alpha - \beta)$$

$$\therefore \overline{PQ}^2 = 2 - 2 \cos(\alpha - \beta) \quad \dots\dots\dots ②$$

$$\text{따라서, } ①, ② \text{에서 } \cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \quad \dots\dots\dots ③$$

다음에 ③에서 β 대신 $-\beta$ 를 대입하면

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta (\because \cos(-\beta) = \cos \beta, \sin(-\beta) = -\sin \beta)$$



(2) 앞의 ③에서 α 대신 $\alpha - \frac{\pi}{2}$ 를 대입하면

$$\cos\left\{\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) - \beta\right\} = \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) \cos \beta + \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) \sin \beta$$

$$\text{그런데 } \cos\left\{\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) - \beta\right\} = \cos\left\{(\alpha - \beta) - \frac{\pi}{2}\right\} = \sin(\alpha - \beta)$$

$$\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \sin \alpha, \quad \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos \alpha \text{ 이므로}$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

$$\text{같은 방법으로 } \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$(3) \quad \tan(\alpha + \beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta}$$

이므로, 분모, 분자를 $\cos \alpha \cos \beta$ 로 나누어서 정리하면,

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$$

$$\text{같은 방법으로 } \tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}$$

46. 두 직선의 이루는 각

두 직선 $y = m_1x + n_1$, $y = m_2x + n_2$ 가 이루는 각 중 예각의 크기를 θ 라 하면

$$\tan \theta = \left| \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \right| \quad (\text{단, } m_1 \neq m_2, 1 + m_1 m_2 \neq 0)$$

해설

$y = m_1x + n_1$, $y = m_2x + n_2$ 가 x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 α, β 라 하면

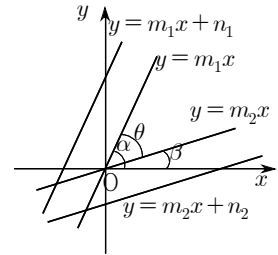
$$\tan \alpha = m_1, \quad \tan \beta = m_2$$

이들 두 직선은 $y = m_1x$, $y = m_2x$ 에 평행하므로 $\theta = \alpha - \beta$

θ 가 양의 예각이면 $\tan \theta > 0$ 이므로

$$\tan \theta = |\tan(\alpha - \beta)| = \left| \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} \right| = \left| \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \right|$$

$$\therefore \tan \theta = \left| \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \right|$$



47. 삼각함수의 합성

$$(1) a \sin \theta + b \cos \theta = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\theta + \alpha)$$

$$\left(\text{단, } \cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \sin \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)$$

$$(2) a \sin \theta + b \cos \theta = \sqrt{a^2 + b^2} \cos(\theta - \beta)$$

$$\left(\text{단, } \cos \beta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \sin \beta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)$$

(3) 함수의 최댓값·최솟값

$$a \sin \theta + b \cos \theta = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\theta + \alpha) \text{에서 } -1 \leq \sin(\theta + \alpha) \leq 1 \text{이므로 최댓값 : } \sqrt{a^2 + b^2}, \text{ 최솟값 : } -\sqrt{a^2 + b^2}$$

48. 삼각함수의 극한

$$(1) \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1$$

<증명>

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1 \text{의 증명}$$

$$0 < x < \frac{\pi}{2} \text{ 일 때}$$

중심각의 크기가 x 라디안이고 반지름의 길이가 1인 부채꼴 OAB 에서

점 A 에서의 접선이 직선 OB의 연장선과 만나는 점을 T 라고 하면

$$\triangle OAB < \triangle OAB < \triangle OAT$$

여기서 각 넓이를 구해보면

$$\frac{1}{2} \sin x < \frac{1}{2} x < \frac{1}{2} \tan x \quad \therefore \sin x < x < \tan x$$

$$\text{그런데 } \sin x > 0 \text{ 이므로 각 변을 } \sin x \text{ 로 나누면} \quad 1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

$$\text{각 항의 역수를 취하면 } \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

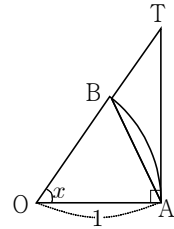
$$\text{그런데 } \lim_{x \rightarrow +0} \cos x = 1 \text{ 이므로 } \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$-\frac{\pi}{2} < x < 0 \text{ 일 때}$$

$x = -\theta$ 로 놓으면 $x \rightarrow -0$ 일 때 $\theta \rightarrow +0$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow -0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{\sin(-\theta)}{-\theta} = \lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1$$

$$\text{따라서 (1), (2)에 의하여 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$



49. 삼각함수의 극한 (단, x 는 라디안)

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\tan x} = 1$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin nx}{mx} = \frac{n}{m}$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{nx}{\sin mx} = \frac{n}{m}$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan nx}{mx} = \frac{n}{m}$$

$$(7) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{nx}{\tan mx} = \frac{n}{m}$$

50. 삼각함수의 미분법

$$(1) (\sin x)' = \cos x$$

$$(2) (\cos x)' = -\sin x$$

$$(3) (\tan x)' = \sec^2 x$$

$$(4) (\cot x)' = -\operatorname{cosec}^2 x$$

$$(5) (\sec x)' = \sec x \tan x$$

$$(6) (\operatorname{cosec} x)' = -\operatorname{cosec} x \cot x$$

51. 몫의 미분법

$$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{(u(x))'v(x) - u(x)(v(x))'}{(v(x))^2}$$

$n = -1, -2, -3, \dots$ 일 때, $y = x^n$ 이면 $y' = n x^{n-1}$

52. 합성함수의 미분법

$y = f(u)$, $u = g(x)$ 가 각각 u 와 x 에 대하여 미분가능하면

합성함수 $y = f(g(x))$ 도 x 에 관하여 미분가능하고, 도함수는

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \quad \text{또는} \quad y' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

$$y = \{f(x)\}^n \longrightarrow \frac{dy}{dx} = n \{f(x)\}^{n-1} f'(x) \quad (n \text{은 정수})$$

53. 음함수와 양함수의 뜻

y 가 x 의 함수일 때, $f(x, y) = 0$ 꼴의 함수를 음함수라 하고,

$y = f(x)$ 꼴의 함수를 양함수라 한다.

54. 음함수의 미분법

$$y \text{가 } x \text{의 함수일 때, } \frac{d}{dx} f(y) = \frac{d}{dy} f(y) \cdot \frac{dy}{dx}$$

위의 성질을 이용하여 $x^2 + y^2 = 1$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\frac{d}{dx} x^2 + \frac{d}{dx} y^2 = \frac{d}{dx} 1 \text{에서 } 2x + \frac{d}{dy} y^2 \cdot \frac{dy}{dx} = 0, \quad 2x + 2y \frac{dy}{dx} = 0 \quad \therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

55. 역함수의 미분법

함수 $y = f(x)$ 가 미분가능 할 때, 역함수가 $x = g(y)$ 가 존재하고 미분가능하면

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)}$$

56. 역함수 미분의 기하학적 의미

$y = f(x)$ 의 역함수 $y = g(x)$ 위의 한 점 $P(a, b)$ 에서 미분계수 $g'(a)$ 는 다음과 같다.

$$g'(b) = \frac{1}{f'(a)}$$

57. 매개변수의 미분법

$x = f(t)$, $y = g(t)$ 가 각각 미분가능하고 $f'(t) \neq 0$ 이면 다음이 성립한다.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

58. 매개변수의 미분법

$x = f(t)$, $y = g(t)$ 가 t 에 대하여 미분가능하고 $f'(t) \neq 0$ 이면

t 는 x 의 함수라 생각할 수 있으므로 t 의 증분 Δt 에 대한 x 의 증분을 Δx 라 하면 $\Delta x \rightarrow 0$ 일 때, $\Delta t \rightarrow 0$ 이다.

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\frac{\Delta y}{\Delta t}}{\frac{\Delta x}{\Delta t}} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{g'(t)}{f'(t)}$$

$$(\because \Delta x \rightarrow 0 \text{ 일 때, } \Delta t \rightarrow 0) \quad \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{g'(t)}{f'(t)}$$

59. 이계도함수

함수 $y = f(x)$ 의 도함수 $f'(x)$ 의 도함수를 $f(x)$ 의 이계도함수라 하고 기호로는

$$f''(x), y'', \frac{d^2}{dx^2}, \frac{d^2 y}{dx^2} \text{ 등으로 나타낸다.}$$

60. n 계도함수

함수 $y = f(x)$ 가 x 에 대해 n 번 미분가능할 때, x 에 대하여 n 번 계속 미분한 것을

$$n \text{ 계도함수라 하고, 다음과 같이 나타낸다.} \quad f^{(n)}(x), y^{(n)}, \frac{d^n}{dx^n} f(x), \frac{d^n y}{dx^n}$$

61. 부정적분의 계산

- (1) $\int k \, dx = kx + C$ (k 는 상수)
- (2) $\int x^n \, dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C$ ($n \neq -1$ 인 실수)
- (3) $\int k \cdot f(x) \, dx = k \int f(x) \, dx$ (k 는 상수)
- (4) $\int \{f(x) \pm g(x)\} \, dx = \int f(x) \, dx \pm \int g(x) \, dx$ (복호 동순)
- (5) $\int (ax+b)^n \, dx = \frac{1}{a(n+1)} (ax+b)^{n+1} + C$ ($a \neq 0, n \neq -1$ 인 실수)

62. 삼각함수의 부정적분

- (1) $\int \sin x \, dx = -\cos x + C$
- (2) $\int \cos x \, dx = \sin x + C$
- (3) $\int \sec^2 x \, dx = \tan x + C$
- (4) $\int \operatorname{cosec}^2 x \, dx = -\cot x + C$
- (5) $\int \sec x \tan x \, dx = \sec x + C$
- (6) $\int \operatorname{cosec} x \cot x \, dx = -\operatorname{cosec} x + C$

63. 지수함수의 부정적분

- (1) $\int e^x \, dx = e^x + C$
- (2) $\int e^{f(x)} \, dx = \frac{e^{f(x)}}{f'(x)} + C$
- (3) $\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
- (4) $\int a^{f(x)} \, dx = \frac{a^{f(x)}}{f'(x) \cdot \ln a} + C$

64. 분수함수의 부정적분

- (1) $\int \frac{1}{x} \, dx = \ln |x| + C$
- (2) $\int \frac{1}{ax+b} \, dx = \frac{1}{a} \ln |ax+b| + C$
- (3) $\int \frac{f'(x)}{f(x)} \, dx = \ln |f(x)| + C$

부분분수로 분해

- (1) (1차식 이하) $\frac{p}{(x+a)(x+b)} = \frac{p}{x+a} + \frac{q}{x+b}$
- (2) (2차식 이하) $\frac{p}{(x+a)(x+b)(x+c)} = \frac{p}{x+a} + \frac{q}{x+b} + \frac{r}{x+c}$
- (3) (2차식 이하) $\frac{p}{(x+a)^2(x+b)} = \frac{p}{(x+a)^2} + \frac{q}{x+a} + \frac{r}{x+b}$
- (4) (3차식 이하) $\frac{p}{(x+a)^3(x+b)} = \frac{p}{(x+a)^3} + \frac{q}{(x+a)^2} + \frac{r}{x+a} + \frac{s}{x+b}$

65. 치환적분

1. 치환적분법

$$x = g(t) \text{ 일 때, } \int f(x) dx = \int f(g(t)) g'(t) dt$$

2. 치환적분에 관한 기본 공식

$$(1) \int f(x) dx = F(x) + C \text{ 일 때, } \int f(ax+b) dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C (\text{단, } a \neq 0)$$

$$(2) \int \{f(x)\}^n f'(x) dx = \frac{1}{n+1} \{f(x)\}^{n+1} + C (\text{단, } n \neq -1)$$

3. 치환적분의 여러 가지 공식

$$(1) \int (ax+b)^n dx = \frac{1}{a(n+1)} (ax+b)^{n+1} + C \quad (2) \int \sin(ax+b) dx = -\frac{1}{a} \cos(ax+b) + C$$

$$(3) \int \cos(ax+b) dx = \frac{1}{a} \sin(ax+b) + C \quad (4) \int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \ln |ax+b| + C$$

$$(5) \int \tan x dx = -\ln |\cos x| + C \quad (6) \int \cot x dx = \ln |\sin x| + C$$

4. 삼각치환

$$(1) y = \sqrt{a^2 - x^2} \text{ 꼴은 } x = a \sin \theta \left(-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, a > 0 \right) \text{로 치환}$$

$$(2) y = \frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}} \text{ 꼴은 } x = a \tan \theta \left(-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}, a > 0 \right) \text{로 치환}$$

66. 부분적분법

$$\int f'(x) g(x) dx = f(x) g(x) - \int f(x) g'(x) dx$$

67. 정적분의 기본정리

연속함수 $f(x)$ 의 부정적분의 하나를 $F(x)$ 라 하면

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(y)dy$$

(1) 정적분의 치환적분법

함수 $x=g(t)$ 가 구간 $[\alpha, \beta]$ 에서 증가(또는 감소)하고 미분가능할 때, $a=g(\alpha)$, $b=g(\beta)$ 이면

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(g(t))g'(t)dt$$

(2) 삼각치환에 의한 정적분

(1) $\sqrt{a^2 - x^2}$ 의 꼴 : $x = a \sin \theta \left(-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right)$

(2) $\sqrt{x^2 + a^2}$, $\frac{1}{x^2 + a^2}$ 의 꼴 : $x = a \tan \theta \left(-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \right)$

로 각각 치환하여 정적분의 값을 구한다.(단, $a > 0$)

(3) 그래프의 대칭을 이용한 정적분

(1) $f(x)$ 가 기함수이면 $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$

(2) $f(x)$ 가 우함수이면 $\int_{-a}^a f(x)dx = 2 \int_0^a f(x)dx$

(4) 정적분의 부분적분법

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = \left[f(x)g(x) \right]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx$$

68. 정적분으로 정의된 함수와 미분

- (1) $\frac{d}{dx} \int_a^x f(t)dt = f(x)$
- (2) $\frac{d}{dx} \int_x^{x+a} f(t)dt = f(x+a) - f(x)$
- (3) $\frac{d}{dx} \int_a^x xf(t)dt = \int_a^x f(t)dt + xf(x)$
- (4) $\frac{d}{dx} \int_a^x (x-t)f(t)dt = \int_a^x f(t)dt$
- (5) $\frac{d}{dx} \int_{h(x)}^{g(x)} f(t)dt = f(g(x))g'(x) - f(h(x))h'(x)$

69. 정적분으로 정의된 함수에서 $f(x)$ 구하기

(1) 적분구간이 상수로 되어 있을 때,

$$f(x) = g(x) + \int_{\text{상수}}^{\text{상수}} f(t)dt \text{ 의 꼴} \rightarrow \int_{\text{상수}}^{\text{상수}} f(t)dt = a \text{로 치환한다.}$$

(2) 적분구간에 변수 x 가 있을 때, $\int_a^x f(t)dt = g(x)$ 꼴 $\rightarrow$ 양변을 x 에 관하여 미분

70. 정적분으로 정의된 함수의 극한

- (1) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{x-a} \int_a^x f(t)dt = f(a)$
- (2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \int_a^{x+a} f(t)dt = f(a)$

71. 정적분과 무한급수

연속함수 $f(x)$ 에 대하여

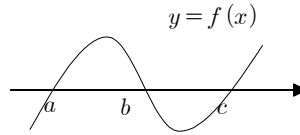
- (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f\left(a + \frac{b-a}{n}k\right) \cdot \frac{b-a}{n} = \int_a^b f(x)dx$
- (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f\left(a + \frac{p}{n}k\right) \cdot \frac{p}{n} = \int_a^{a+p} f(x)dx$
- (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{p}{n}k\right) \cdot \frac{p}{n} = \int_0^p f(x)dx$

72. 정적분과 넓이

- (1) 넓이는 항상 양이다.
 (2) 주어진 적분 구간에서 함수의 그래프가 x 축 위에 있으면 정적분의 값은 양이지만,
 x 축 아래에 있으면 정적분의 값은 음이다.

오른쪽 그림에서

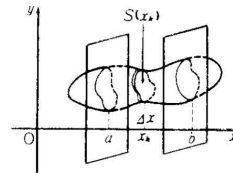
- ① 구간 $[a, b]$ 에서는
 (그래프가 x 축 위에 있을 때)
 넓이=정적분



- ② 구간 $[b, c]$ 에서는
 (그래프가 x 축 아래에 있을 때)
 넓이=-정적분

73. 일반 입체의 부피

오른쪽 그림과 같이 공간에 입체가 주어질 때 x 축을
 정하고 x 좌표가 a, b 인 두 점을 지나 x 축에 수직인 두
 평면 사이에 있는 부분의 부피를 구하여 보자.



좌표가 x 인 점을 지나 x 축에 수직인 평면으로 자른
 입체의 단면의 넓이 $S(x)$ 는 x 의 함수이다.

구간 $[a, b]$ 를 n 등분하고 n 개의 기둥을 만들 때 k 번째의 기둥의 부피는 $S(x_k) \Delta x$ 이므로
 n 개의 기둥의 부피의 합 V_n 은

$$V_n = \sum_{k=1}^n S(x_k) \Delta x$$

따라서 구하는 입체의 부피 V 는

$$V = \lim_{n \rightarrow \infty} V_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n S(x_k) \Delta x = \int_a^b S(x) dx$$

밀면의 반지름이 r 인 직원기둥에서 밀면의 중심을 지나고, 밀면과 α 의 각을 이루
 는 평면으로 자른 아래쪽 부분의 도형의 부피 V

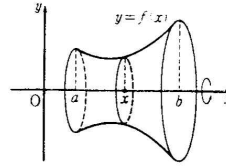
$$\Rightarrow V = \frac{2}{3} r^3 \tan \alpha$$

74. 회전체의 부피

점

(1) x 축을 회전축으로 하는 회전체의 부피

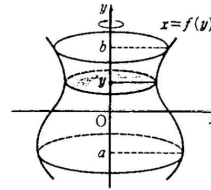
구간 $[a, b]$ 에서 연속인 곡선 $y=f(x)$ 를 x 축 둘레로 회전시킬 때 생기는 회전체의 부피를 구하여 보자 구간 $[a, b]$ 의 임의의



x 에서의 회전체의 단면의 넓이 $S(x)$ 는 반지름의 길이가 $|f(x)|$ 인 원의 넓이가 되므로 $S(x)=\pi y^2=\pi\{f(x)\}^2$ 이다. 따라서 구하는 회전체의 부피 V_x 는

$$V_x = \int_a^b S(x) dx = \pi \int_a^b \{f(x)\}^2 dx$$

(2) y 축을 회전축으로 하는 회전체의 부피 구간 $[a, b]$ 에서 연속인 곡선 $x=f(y)$ 를 y 축 둘레로 회전시킬 때 생기는 회전체의 부피 V_y 는 단면의 넓이 $S(y)$ 가



$S(y)=\pi x^2=\pi\{f(y)\}^2$ 이므로

$$V_y = \int_a^b S(y) dy = \pi \int_a^b \{f(y)\}^2 dy$$

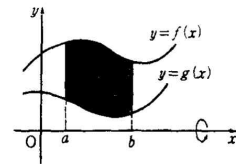
(3) 두 곡선으로 둘러싸인 부분의 회전체의 부피

① 함수 $f(x), g(x)$ 가 구간 $[a, b]$ 에서 연속이고

$f(x) \geq g(x) \geq 0$ 이라 할 때, 두 곡선 $y=f(x), y=g(x)$

와 두 직선 $x=a, x=b$ 로 둘러싸인 부분을 x 축 둘레로 회전하여 얻은 회전체의 부피 V_x 는, 곡선 $y=f(x)$ 를 회전하여 얻은 회전체의 부피에서 곡선 $y=g(x)$ 를 회전하여 얻은 회전체의 부피를 뺀 것과 같다.

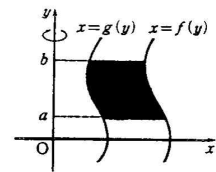
$$\Rightarrow V_x = \pi \int_a^b \left[\{f(x)\}^2 - \{g(x)\}^2 \right] dx$$



② 구간 $[a, b]$ 에서 $f(y) \geq g(y) \geq 0$ 인 두 곡선

$x=f(y), x=g(y)$ 로 둘러싸인 부분을 y 축 둘레로 회전하여 얻은 회전체의 부피 V_y 는

$$\Rightarrow V_y = \pi \int_a^b \left[\{f(y)\}^2 - \{g(y)\}^2 \right] dy$$



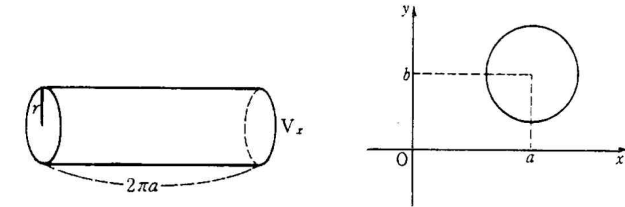
(4) 부채꼴 OAB를 $\overline{OA}$ 의 둘레로 회전시켜 생기는 회전체의 부피

$$\Rightarrow V = \frac{2}{3}\pi r^3 (1 - \cos \alpha)$$

(5) 환원체의 부피

원 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ 을 회전시켰을 때, (단, $a > 0, b > 0$)

$$\Rightarrow V_x = 2\pi^2 r^2 b = 2\pi b S, \quad V_y = 2\pi^2 r^2 a = 2\pi a S \quad (\text{단, } S \text{는 원의 넓이})$$



※ $y=f(x)$ 와 $y=g(x)$ 가 $y=k$ 에 대하여 대칭일 때, $y=f(x), y=g(x)$ 와 $x=\alpha, x=\beta$ 로 둘러싸인 부분 S 를 x 축 둘레로 회전시킨 입체의 부피는 $2\pi k S$ 임을 보시오. [토러스의 공식]

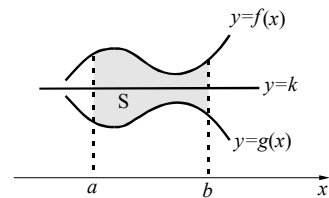
증명

$$\frac{f(x)+g(x)}{2} = k \text{ 이므로 } f(x)+g(x) = 2k \text{ 이다.}$$

$$\text{회전체의 부피}(V) = \pi \int_a^b \left\{ f^2(x) - g^2(x) \right\} dx$$

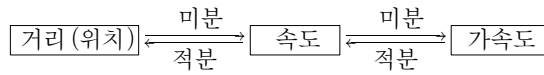
$$= \pi \int_a^b \left\{ f(x) - g(x) \right\} \left\{ f(x) + g(x) \right\} dx$$

$$= 2\pi k \int_a^b \left\{ f(x) - g(x) \right\} dx = 2\pi k S$$



75. 가속도•속도•거리의 관계

미분과 적분은 서로 역연산의 관계이므로 다음이 성립한다.



76. 위치의 변화와 실제로 움직인 거리

수직선 위를 움직이는 점 P 의 시간 t 에서의 속도를 $v(t)$, 시간 $t=t_0$ 에서의 점 P 의 위치를 $s(t_0)$ 라 할 때,

$$\text{시간 } t \text{에서의 점 } P \text{의 위치는} \quad \Rightarrow s(t) = \underbrace{s(t_0)}_{\rightarrow \text{처음 위치}} + \underbrace{\int_{t_0}^t v(t) dt}_{\rightarrow \text{위치의 변화량}}$$

$$\text{시간 } t=a \text{에서 } t=b \text{까지의 점 } P \text{의 위치의 변화량} \quad \Rightarrow \int_a^b v(t) dt$$

$$\text{시간 } t=a \text{에서 } t=b \text{까지의 점 } P \text{가 실제로 움직인 거리} \Rightarrow \int_a^b |v(t)| dt$$

77. 평면에서 경과거리

미분가능한 함수 f 와 g 에 대하여 시간 t 에서 $P(f(t), g(t))$ 라 하면
 $t=a$ 에서 $t=b$ 까지 P 의 경과거리 s 은 다음과 같다.

$$s = \int_a^b |\vec{v}| dt = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$$

78. 곡선의 길이

(1) 곡선 $y=f(x)$ 에서 $a \leq x \leq b$ 부분의 곡선의 길이 l 은

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

(2) 곡선 $x=f(t), y=g(t)$ 에서 $a \leq t \leq b$ 부분의 곡선의 길이 l 은

$$l = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$$